Oppgave 1

La X, Y, Z være stokastiske variable og la c være en konstant. Vis at

a) $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$

b) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

c) $\text{Cov}(cX, Y) = c\,\text{Cov}(X, Y)$

d) $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

Oppgave 2

La X_1, X_2 være stokastiske variable. Vi definerer forventningsvektoren μ og kovariansmatrisen $\mathbf{\Sigma}$ ved

$$\mu = \begin{pmatrix} E[X_1] & E[X_2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2, X_2) \end{pmatrix}$$

La $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$, der a_1, a_2 er konstanter. Vis at $E[Y] = \mu \cdot \mathbf{a}$ og at $\mathrm{Var}[Y] = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{a}$.

Oppgave 3

La $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}^T$, og anta at forventningsvektoren μ og kovariansmatrisen σ er gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La $Y = 5X_1 - X_2 + 2X_3$. Finn $E[Y]$ og $\text{Var}[Y]$.

Oppgave 4

La X_1 og X_2 være stokastiske variable med henholdsvis forventingsverdier og kovariansmatrise gitt ved

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Hvis mulig, bestem a_1 og a_2 slik at $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ har minst mulig varians $\mathrm{Var}[Y]$ og samtidig slik at $E[Y] = 6$.

Oppgave 5

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige stokastiske variable med samme sannsynlighetsfordeling, og la $\mu = E[X_i]$ og $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Vi definerer *(empirisk) gjennomsnitt* $\overline{X}$ ved

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Vis at $E[\overline{X}] = \mu$ og at $\text{Var}[\overline{X}] = \sigma^2/n$.

Oppgave 6

I en populasjon er det følgende inntekter:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 160, & x_2 = 160, & x_3 = 160, & x_4 = 170, \\ x_5 = 170, & x_6 = 180, & x_7 = 180, & x_8 = 180, \\ x_9 = 180, & x_{10} = 180, & x_{11} = 190, & x_{12} = 200 \end{array}$$

Beregn populasjonsgjennomsnittet μ og populasjonsvariansen σ^2, gitt ved

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \mu)^2$$

La X være den stokastiske variabelen som framkommer ved å trekke en tilfeldig inntekt fra populasjonen. Hvilke verdier kan X ha? Finn sannsynlighetstettheten til X, og beregn $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.