Oppgave 1

Finn egenverdiene til A, og bruk dem til å finne $\det(A)$ og $\operatorname{tr}(A)$ i hvert tilfelle:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Oppgave 2

Finn alle egenvektorene til matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 3

Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finn alle egenvektorene til A når $s = 2$.

Oppgave 4

Finn alle egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 17 & 89 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En matrise som er null under diagonalen (slik som A) kalles *øvre triangular*. Hva kan du si om egenverdiene til en triangulær matrise?

Oppgave 5

Avgjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definit eller negativ (semi)definit i hvert tilfelle:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Oppgave 6

Klassifiser de kvadratiske formene som positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit:

a) $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2 + 3x_3^2$

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_2^2$

Oppgave 7

La A være en symmetrisk 2×2-matrise.

a) Vis at A er positiv definit hvis og bare hvis $\det(A) > 0$ og $\operatorname{tr}(A) > 0$.

b) Vis at A er indefinit hvis og bare hvis $\det(A) < 0$.

Oppgave 8

La A være en (ikke nødvendigvis kvadratisk) matrise, og la $B = A^T A$. Vis at B er en kvadratisk, symmetrisk og positiv semidefinit matrise. Vis også at hvis A er en kvadratisk invertibel matrise, så er B positiv definit.