BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

Løsningsforslag:	**Prøve-eksamen i ELE 3719 Matematikk valgfag**
Dato:	XX.YY.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	4

Oppgave 1.

(a) Vi leser av at

$$A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}}}, \quad B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 20 & 25 \end{pmatrix}}}, \quad C = \underline{\underline{-240}}$$

og har dermed at

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} + B^T = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 10 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6x + 10y + 20 \\ 10x - 18y + 25 \end{pmatrix}}}$$

(b) Den karakterstiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 5 & -9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 2 = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = \underline{\underline{-6 \pm \sqrt{34}}} < 0$. Siden begge egenverdier er negative, er A <u>negativ semidefinit</u> (og også negativ definit).

(c) Vi har at $\det(A) = 2 \neq 0$, så A er invertibel. Dermed har π et entydig stasjonært punkt, gitt ved

$$2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}A^{-1}B^T$$

Ettersom A er negativ (semi)definit, er π konkav og det stasjonære punktet $\mathbf{x}^* = -\frac{1}{2}A^{-1}B^T$ er et maksimum. Vi finner at

$$\mathbf{x}^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -9 \cdot 20 - 5 \cdot 25 \\ -5 \cdot 20 - 3 \cdot 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76.25 \\ 43.75 \end{pmatrix}$$

Dette gir maksimal verdi $\pi(x^*, y^*) = \pi(76.25, 43.75) = \underline{\underline{1069.375}}$.

Oppgave 2.

(a) Den karakteristiske likningen til A er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 9 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 35) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda = 3$ og $\lambda = 1 \pm \sqrt{36}$. Altså er $\underline{\underline{\lambda = 3}}$ en egenverdi, og de andre egenverdiene er $\underline{\underline{\lambda = 7}}$ og $\underline{\underline{\lambda = -5}}$.

(b) Egenvektorene for $\lambda = 3$ er gitt ved det lineære systemet

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at at andre likning er irrelevant og kan tas bort, og at z er fri parameter siden

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi løser de to gjenværende likningene for x og y og får

$$x = -z/7, \quad y = -15z/7$$

Når vi setter $z = t$ for den frie variabelen z, får vi dermed at egenvektorene for $\lambda = 3$ kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t/7 \\ -15t/7 \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}}} \cdot t$$

(c) Anta $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ og at $A\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{w}$ med $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vi skal vise at vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ er lineært uavhengige. Hvis de er lineært avhengige, så er $\mathbf{v} = c\mathbf{w}$ for en $c \neq 0$. Dette gir

$$A\mathbf{v} = A \cdot (c\mathbf{w}) = cA\mathbf{w}$$

og dermed

$$\lambda_1 \mathbf{v} = c\lambda_2 \mathbf{w} = \lambda_2(c\mathbf{w}) = \lambda_2 \mathbf{v}$$

Vi kan skrive dette som $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og dette er ikke mulig siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dermed er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

Oppgave 3.

(a) Differensiallikningen $e^t y' = y^2$ er separabel, og vi skriver den på separert form

$$\frac{1}{y^2}\, y' = e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}y = e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Integrasjon gir dermed

$$-\frac{1}{y} = -e^{-t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{e^{-t} - C}$$

Vi setter inn for initialbetingelsen $y(0) = 1/2$, som gir $1/2 = 1/(1 - C)$ og dermed $C = -1$, og løsningen er

$$y = \frac{1}{e^{-t} + 1} = \underline{\underline{\frac{e^t}{1 + e^t}}}$$

(b) Differensiallikningen $t^3 y' + 2y = 1$ er lineær, og vi skriver den på standard form $y' + a(t)y = b(t)$:

$$t^3 y' + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{2}{t^3} y = \frac{1}{t^3}$$

Vi finner integrerende faktor u:

$$\int \frac{2}{t^3}\, \mathrm{d}t = \int 2t^{-3}\, \mathrm{d}t = -t^{-2} + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{-t^{-2}} = e^{-1/t^2}$$

Vi multipliserer differensiallikningen med integrerende faktor u og får

$$y' + \frac{2}{t^3} y = \frac{1}{t^3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(y e^{-1/t^2} \right)' = \frac{1}{t^3} e^{-1/t^2}$$

Integrasjon og divisjon med u gir generell løsning

$$y e^{-1/t^2} = \int \frac{1}{t^3} e^{-1/t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} e^{-1/t^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{2} + C e^{1/t^2}}}$$

OPPGAVE 4.

(a) Vi setter $F = \ln(\dot{y} + y + e^{-t}) = \ln(u)$, der $u = \dot{y} + y + e^{-t}$, og regner ut

$$F'_y = \frac{1}{u} \cdot u'_y = u^{-1}, \quad F'_{\dot{y}} = \frac{1}{u} \cdot u'_{\dot{y}} = u^{-1}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F'_{\dot{y}} = -u^{-2} \cdot u'_t = -\left(\ddot{y} + \dot{y} - e^{-t}\right) u^{-2}$$

Dermed er Euler-likningen gitt ved

$$u^{-1} + \left(\ddot{y} + \dot{y} - e^{-t}\right) u^{-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u + \ddot{y} + \dot{y} - e^{-t} = 0$$

Når vi setter inn for u, får vi dermed at

$$\dot{y} + y + e^{-t} + \ddot{y} + \dot{y} - e^{-t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

Dermed er (den forenklede) Euler-likningen $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = k$, der $\underline{\underline{a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ k = 0}}$.

(b) Vi tar utgangspunkt i den forenklede Euler-likningen, som er lineær og homogen. Den karakteristiske likningen $r^2 + 2r + 1 = 0$ har dobbelrot $r = -1$, og dermed er den generelle løsningen

$$y = (A + Bt)e^{-t}$$

Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 2,\ y(3) = 5e^{-3}$ og får $A = 2$ og $(A + 3B)e^{-3} = 5e^{-3}$ eller $B = 1$. Løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene er dermed $\underline{\underline{y^* = (2 + t)e^{-t}}}$.

(c) Vi undersøker om F er konveks eller konkav som funksjon i $(y, \dot{y})$, og regner ut

$$F''_{yy} = F''_{y\dot{y}} = F''_{\dot{y}\dot{y}} = -u^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{yy}F''_{\dot{y}\dot{y}} - \left(F''_{y\dot{y}}\right)^2 = 0$$

Det følger at F er konkav som funksjon i $(y, \dot{y})$, og dermed er y^* et maksimum. Den maksimale verdien av integralet er

$$\int_0^3 \ln(\dot{y^*} + y^* + e^{-t})\,\mathrm{d}t = \int_0^3 \ln(2e^{-t})\,\mathrm{d}t = \left[\ln(2)t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^3 = \underline{\underline{3\ln(2) - \frac{9}{2}}} \simeq -2.42$$

OPPGAVE 5.

(a) X er binomisk fordelt med parametre $n = 5$ og $p = 0.53$. Vi har at $P(X = 3) \simeq \underline{\underline{0.329}}$ og $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \simeq \underline{\underline{0.556}}$.

(b) Vi har $E[X] = np = \underline{\underline{2.65}}$ og $\mathrm{Var}[X] = np(1 - p) \simeq \underline{\underline{1.246}}$.

(c) Vi uttrykker Y ved hjelp av X som

$$Y = 151.10 \cdot u^X d^{n-X} = 151.10 \cdot u^{2X-n} = \underline{\underline{151.10 \cdot 1.012^{2X-5}}}$$

Vi regner ut $E[Y]$ som tilnærmingsverdi:

$$E[Y] = \sum_{i=0}^{5} P(X = i) \cdot 151.10 \cdot 1.012^{2i-5} \simeq \underline{\underline{151.70}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[Y]$, regner vi også ut det andre momentet til Y som tilnærmingsverdi:

$$E[Y^2] = \sum_{i=0}^{5} P(X = i) \cdot \left(151.10 \cdot 1.012^{2i-5}\right)^2 \simeq 23028.00$$

Dermed er $\mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 \simeq \underline{\underline{16.30}}$.

(d) Verdien av Z avhenger ikke kun av X, antall bevegelser opp, men også rekkefølgen de kommer i. Vi må derfor tenke oss et stokastisk forsøk der utfallsrommet er alle sekvenser ω av synmbolene u og d av lengde fem, med utfallsrom $S = \{\text{ddddd}, \text{ddddu}, \text{dddud}, \text{ddduu}, \dots, \text{uuuuu}\}$. Tabellen

$\omega = \text{ddddd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-5} \simeq 142.35$
$\omega = \text{ddddu}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-4} \simeq 144.06$
$\omega = \text{dddud}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{ddduu}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{ddudd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{duddd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$
$\omega = \text{udddd}$	$Z = 151.10 \cdot 1.012^{-3} \simeq 145.79$

viser verdien av Z for de ulike utfallene, og vi har kun tatt med de 7 utfallene som gir $Z < 146$ (det er $2^5 = 32$ utfall i alt). Vi får dermed

$$P(Z < 146) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \cdot \frac{1}{10} \simeq \underline{\underline{0.181}}$$

siden alle utfallene som gir $X = 0$ og $X = 1$ er med i listen ovenfor, mens ett av de ti utfallene som gir $X = 2$ er med. Hint: Det kan være litt enklere å se hvilke verdier av Z de ulike utfallene gir hvis vi tegner opp et binomisk tre for de ulike utfallene.

Oppgave 6.

(a) Vi regner ut $f_X(x)$ når $x \geq 0$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} 6e^{-2x-3y}\,\mathrm{d}y = \left[-2e^{-2x-3y}\right]_0^{\infty} = \underline{\underline{2e^{-2x}}}$$

Når $x < 0$ er $f_X(x) = \underline{\underline{0}}$. Dermed er den stokastiske variabelen X $\underline{\underline{\text{eksponensielt fordelt}}}$ med parameter $\lambda = 2$.

(b) Siden X er eksponensielt fordelt med $\lambda = 2$, så er $E[X] = 1/\lambda = \underline{\underline{1/2}}$ og $\mathrm{Var}[X] = 1/\lambda^2 = \underline{\underline{1/4}}$.

(c) Den betingede sannsynlighetstettheten $f_{Y|X}(y|x)$ når $x \geq 0$ er gitt ved

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Dersom også $y \geq 0$, så er den betingede sannsynlighetstettheten $f_{Y|X}(y|x)$ gitt ved

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{6e^{-2x-3y}}{2e^{-2x}} = \underline{\underline{3e^{-3y}}}$$

Dersom $x \geq 0$ men $y < 0$, så er $f_{Y|X}(y|x) = \underline{\underline{0}}$.

(d) Vi regner ut $f_Y(y)$ når $y \geq 0$ ved integrasjon:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} 6e^{-2x-3y}\,\mathrm{d}x = \left[-3e^{-2x-3y}\right]_0^{\infty} = \underline{\underline{3e^{-3y}}}$$

Når $y < 0$ er $f_Y(y) = \underline{\underline{0}}$. Dermed er $f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)$, og det betyr at X og Y er $\underline{\underline{\text{uavhengige}}}$ stokastiske variabler.

(e) Siden X og Y er uavhengige stokastiske variable, har vi

$$P(X \geq 1, Y \leq 1) = P(X \geq 1)P(Y \leq 1) = (1 - P(X \leq 1))P(Y \leq 1)$$

Både X og Y er ekponensielt fordelte, med $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$ henholdsvis. Vi regner ut den kumulative fordelingsfunksjonen for en vilkårlig eksponensielt fordelt variabel Z:

$$F_Z(a) = P(Z \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \left[-e^{-\lambda z}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

Vi setter inn og får

$$P(X \geq 1, Y \leq 1) = (1 - P(X \leq 1))P(Y \leq 1) = e^{-2}(1 - e^{-3}) = \underline{\underline{e^{-2} - e^{-5}}} \simeq 0.129$$