FOKELESNING 12

ELE 3719

EIVIND ERIKSEN

FEB 28 2012

MATEMATIKK VALGFAG

PLAN:

* LINEÆRE Likningssystemer og Gauss-eliminasjon
  HEFTE: "Linear systems and Gaussian elimination" [LSGE] Kap. 1-2

Oppgavearb 6

[K] 3.13: X fordelt vha. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{ellers} \end{cases}$

$$E[X \mid X > 1] = \int_1^\infty \overset{u}{x} \cdot \frac{\overbrace{\lambda e^{-\lambda x}}^{v'}}{e^{-\lambda}} \, dx$$

$$f_{X \mid X>1}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X>1)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\left[-e^{-\lambda x}\right]_1^\infty} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{1}{e^{-\lambda}} \left(x \cdot (-e^{-\lambda x}) + \int 1 \cdot e^{-\lambda x} dx \right)_1^\infty$$

$$= e^{\lambda} \cdot \left[-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_1^\infty$$

$$= e^{\lambda} \left(1 \cdot e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \right) = \underline{\underline{1 + \frac{1}{\lambda}}}$$

Løsning av lineære likningssystemer

Eks:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

1. $m = 2$ likninger i $2 = n$ ukjente
2. alle likninger er lineære

Lineær likning i $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b}$$

(der $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ er tall)

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 13 \end{aligned}$$

3x3 lineært likningssystem

Her er $x=1, y=1, z=1$ én løsning.

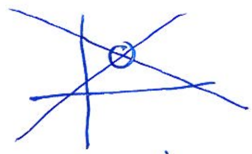
Nyttig metode: Gauss eliminasjon

Teorem:

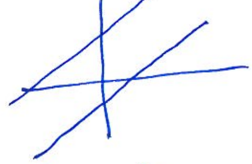
Ethvert lineært likningssystem har enten

1. ingen løsninger
2. én løsning
3. uendelig mange løsninger

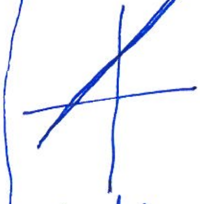
2x2 system:



en løsning



ingen løsn.



uendelig mange løsn.

Gauss - eliminasjon:

Velg først en rekkefølge på variablene!

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+2y+4z &= 7 \\ x+3y+9z &= 13 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

Elementære radoperasjoner:

i) Bytte om to rader

ii) Multiplisere en rad med et tall $c \neq 0$.

iii) Legge til et multippel av en rad til en annen rad

$$\boxed{R(i) := R(i) + c \cdot R(j)}$$

Vi legger til c ganger rad j til rad i.

Eks:

$$\begin{aligned} x+y &= 4 & (R1) \\ x-y &= 2 & (R2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 4 \\ 2x+\cancel{0y} &= 6 & (R1)+(R2) \end{aligned}$$

$y = 1$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

ønsker å eliminere disse

ledende koeffisient (pivot)

= første tall $\neq 0$ i en rad

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

Trappeform (echelon form)

– alle tall under en ledende koeffisient er null.

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ y+3z &= 4 \\ 2z &= 2 \end{aligned}\right.$$

$\underline{x=1}, \underline{y=1}, \underline{z=1}$

Systemer uten løsninger:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 8 \\ -3x - 9y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ -3 & -9 & 4 \end{array}\right) \; 3$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 8 \\ 0\cdot x + 0\cdot y &= 28 \end{aligned}\right\} \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 28 \end{array}\right)$$

$0 = 28$ umulig $\Rightarrow$ ingen løsning

Generelt:

system har ingen løsn. $\iff$ trappeformen har en ledende koeffisient på høyre side (dvs siste kolonne)

Systemer med uendelig mange løsninger

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+2y+4z &= 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

trappeform

Generelt:

Uendelig mange løsn. $\iff$ i) ingen ledende koeff. i siste kolonne
ii) minst én av kolonnene som svarer til variable mangler ledende koeffisient

Fri variabel: (uavhengig) variabel som mangler ledende koeffisient (z er fri eks.)

Avhengig variabel: variabel med ledende koeff. (x, y er avhengige i eks.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+3z=4 \end{cases}$$

$$x = 3-y-z = 3-(4-3z)-z$$
$$y = 4-3z$$
z er fri

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1+2z \\ y &= 4-3z \\ z &= z \quad (\text{fri}) \end{aligned}}$$

Eks:

$$\left.\begin{aligned} x+6y-7z+3w&=1\\ x+9y-6z+4w&=2\\ x+3y-8z+4w&=5\end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1\\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2\\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5\end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4\end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x+6y-7z+3w&=1\\ 3y+z+w&=1\\ 2w&=5\end{aligned} \leftarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5\end{array}\right)$$

trappeform

$w = 5/2$

$3y = 1 - z - w = 1 - z - 5/2 = -\frac{3}{2} - z$

Uendelig mange løsn., én fri variabel (z)

$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}z$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 6y + 7z - 3w\\ &= 1 - 6\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}z\right) + 7z - 3(5/2)\\ &= 1 + 3 + 2z + 7z - 15/2\\ &= -7/2 + 9z\end{aligned}$$

$x = -\frac{7}{2} + 9z$

$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}z$

$z = z$ (fri)

$w = \frac{5}{2}$