FORELESNING 13 — ELE 3719

MATEMATIKK VALGFAG

EIVIND ERIKSEN MAR 01 2012

PLAN:

(1) Matrise- og vektorregning

Defn: En matrise er en rektangulær tabell med tall

En $m \times n$-matrise: $\begin{cases} m & \text{rader} \\ n & \text{kolonner} \end{cases}$

Eks:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2 \times 2) \qquad\qquad (2 \times 3)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = (m_{ij})$$

Matriseoperasjoner:

i) Addisjon / Subtraksjon: $\boxed{M+N,\ M-N \text{ definert hvis } M \text{ og } N \text{ har samme størrelse}}$

Eks:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+7 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}}$$

ii) <u>Skalar multiplikasjon</u> Skalar = tall

<u>Eks:</u>

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}}$$

<u>Spesielle matriser:</u>

<u>Nullmatrisen</u>: $0 = 0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$-A = (-1)\cdot A$ <u>Eks:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Regneregler:</u>

<u>Eks:</u>

$$A + B = B + A$$

$$A + (-A) = 0$$

$\vdots$

~~Se~~ notatet [MKF]

iii) <u>Transponering:</u>

$$\underset{m\times n\text{-matrise}}{A} \longrightarrow \underset{n\times m\text{-matrise}}{A^T}$$

den <u>transponerte</u> til A (A^t, A')

<u>Eks:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3 3×2

Defn: En matrise er symmetrisk hvis $A^T = A$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ A ikke symm.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ B symm.

$(b_{ij} = b_{ji})$

Vektorer:

Defn: En vektor $\overset{\text{kolonnevektorer}}{=}$ er en matrise som består av én kolonne.

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2-vektor 3-vektor

Skrivemåte:

$\underline{v} = \vec{v}$

= v med uthevet skrift.

Vektorer er spesielt matriser. Vi kan bruke matriseoperasjoner.

En vektor kan brukes til å representere punkter i et koordinatsystem.

Eks: $(x, y) = (1, 2) \dashrightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \dashrightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

La $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ være m-vektorer.

En <u>lineær kombinasjon</u> av $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ er et uttrykk på formen

$$\boxed{a_1 \cdot \underline{v}_1 + a_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + a_n \cdot \underline{v}_n}$$

en ny m-vektor

der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er tall.

<u>Eks:</u> $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

<u>Lineærkomb:</u>

$$3 \cdot \underline{v}_1 - 2 \cdot \underline{v}_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}}}$$

$$3 \cdot \underline{v}_1 + (-2) \cdot \underline{v}_2$$

Vektorene $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ er <u>lineært avhengige</u> hvis minst én av vektorene kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre.

<u>Dvs:</u>

$$\underline{v}_1 = a_2 \underline{v}_2 + a_3 \underline{v}_3 + \ldots + a_n \underline{v}_n$$

eller

$$\underline{v}_2 = a_1 \underline{v}_1 + a_3 \underline{v}_3 + \ldots + a_n \underline{v}_n$$

eller

$\vdots$

Hvis de <u>ikke</u> er lineært avhengige, så kalles vektorene <u>lineært</u> <u>uavhengige</u>.

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lineært avhengig eller lineært uavhengig ?

$1 \cdot v_1 - a_2 \underline{v}_2 = \underline{0}$

i) Er $\underline{v}_1 = a_2 \cdot \underline{v}_2$? $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 1 = a_2 \cdot 3 \\ 2 = -7 \cdot a_2 \end{cases}$

Nei.

ingen løsning

$\underline{0} = a_1 \underline{v}_1 - \underline{v}_2$

ii) Er $\underline{v}_2 = a_1 \underline{v}_1$? $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3 = a_1 \\ -7 = 2a_1 \end{cases}$

Nei

ingen løsn.

Konkl.: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er lineært uavhengige.

Resultat: Vi ser på likningen $a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_n \underline{v}_n = \underline{0}$.

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_n\}$ lineært uavhengige $\Longleftrightarrow$ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ er eneste løsning.

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ lineært avhengige $\Longleftrightarrow$ det fins andre løsn. enn $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lin. avh. eller lin. uavh. ?

Ser på: $a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\downarrow$$

Én løsn.

(den trivielle løsn.) $\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineært uavhengige

Flere matriseoperasjoner:

iv) Matrisemultiplikasjon

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \qquad 2\times 3$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 4 & -1 \\ 31 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$M \cdot N$

$(m\times n) \quad (n \times p)$

$\downarrow$

Svar: $(m\times p)$

Hvis #kolonner i M $\neq$ #rader i N, så er $M\cdot N$ ikke defn.

	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 & 4 & -1 \\ 31 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Husk: $A\cdot B \neq B \cdot A$

Se [KKF] for andre regneregler

$$I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 3x3 identitetsmatrise.

Vi har: $A \cdot I = A = IA$

Matrisepotenser:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ &\vdots \\ A^1 &= A \\ A^0 &= I \end{aligned}\right\}$$ A kvadratisk ($n \times n$) matrise

v) Determinant:

Hvis A er kvadratisk ($n \times n$), kan vi regne ut $\det(A) = |A|$ (determinanten til A), et tall.

$n=2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$n>2$: fins formel, komplisert

Alternativ for $n>2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}.$$

(kofaktorutvikling langs første rad)

Kofaktorer:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M(i,j)$$

Fortegn:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Minor: $M(i,j)$ = determinanten til matrisen vi får hvis vi sletter rad i og kolonne j.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \underset{\substack{\parallel \\ 6}}{C_{11}} + 1 \cdot \underset{\substack{\parallel \\ -5}}{C_{12}} + 1 \cdot \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{C_{13}} = \underline{\underline{2}}$$

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 6$$

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 9 - 1 \cdot 4) = \cancel{3} \; -5$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Resultat: Determinanten kan utvikles via en valgfri rad eller kolonne (alle gir samme resultat).