FORELESNING 14 — ELE3719

EIVIND ERIKSEN

MAR 06 2012

MATEMATIKK VALGFAG

PLAN:

1. Determinanter, inverse matriser — 1.7–1.8
2. Matriser og lineære likningssystem — 1.9
3. Egenverdier og egenvektorer — 1.10

---

(1) **Regne regler:**

i) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

ii) $|A^T| = |A|$

iii) $|rA| = r^n\cdot|A|$ når A er $n\times n$-matrise

Eks:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{4} \\ 0 & 3 & 71 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot C_{11} + \cancel{0\cdot C_{21} + 0\cdot C_{31} + 0\cdot C_{41}}$$

$$= +1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 71 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(+3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cancel{- 0\cdot\ldots + 0\cdot\ldots}\right)$$

$$= 1\cdot 3\cdot\big((-1)\cdot 3 - 2\cdot 0\big) = 1\cdot 3\cdot(-1)\cdot 3 = \underline{\underline{-9}}$$

Inverse matriser

A $n \times n$-matrise : Hvis det fins en matrise B slik at

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Så sier vi at A er <u>invertibel</u> med invers $\underline{B = A^{-1}}$.

<u>Resultat</u> : A $n \times n$-matrise

i) A^{-1} fins $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

ii) Hvis $|A| \neq 0$, så er $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A)}$

der $\mathrm{adj}(A) = C^T$ og $C = (C_{ij})$ er kofaktor-matrisen.

<u>Eks:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ fins.

$$C = \begin{pmatrix} +4 & -3 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Regneregler: Anta A, B invertible, $r \neq 0$

i) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

ii) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) =$
$A \cdot (BB^{-1}) A^{-1} = AA^{-1} = \underline{I}$

Matriser og lineære systemer

Eks:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 13 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

Anta at A er invertibel:

$$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$
$$I \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$
$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Konklusjon:

Hvis A er kvadratisk med $|A| \neq 0$, så har det lineære likningssystemet <u>én</u> løsning $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$.

Hvis A er kvadratisk med $|A| = 0$, så har det lineære likningssystemet enten <u>ingen</u> eller uendelig mange løsninger.

Eks: Er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineært uavhengige når

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \ ?$$

Se på:

$$a_1 \cdot \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + a_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$- 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (6) - 1 \cdot (5) + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eneste løsn.}$$

$$\Downarrow$$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ er lin. <u>uavh.</u>

Resultat:

Hvis $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ er n-vektor, så har vi:

$$\begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \dots & \underline{v}_n \end{vmatrix}$$

- $\neq 0$: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ lin. <u>uavhengige</u>
- $= 0$: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ lin. <u>avhengige</u>

Egenverdier og egenvektorer

Anta A $n \times n$-matrise.

Defn: Et tall λ er en egenverdi hvis likningen

$$\boxed{A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}}$$

har en løsning $\underline{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Da er alle vektorer $\underline{v}$ som løser likningen egenvektorer for A med egenverdi λ.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Finn alle egenverdier.

Metode:

$$A \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$$
$$A \underline{v} - \lambda \underline{v} = \underline{0}$$
$$A \underline{v} - \lambda I \underline{v} = \underline{0}$$
$$(A - \lambda I) \underline{v} = \underline{0}$$

$|A - \lambda I| \neq 0 \Rightarrow$ $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$ har kun én løsn. $\underline{v} = \underline{0}$

$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow$ $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$ har uendelig mange løsn.

$(A - \lambda I) \cdot \underline{v}$ har løsninger $\underline{v} \neq \underline{0}$

$$\Updownarrow$$

λ egenverdi

$$\Updownarrow$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

Karakteristisk likning: $|A - \lambda I| = 0$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Karakteristisk likning: $|A - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2}$$

$\underline{\lambda = 3}$ eller $\underline{\lambda = -1}$

Merk: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Kar. likning:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

$$\lambda^2 - tr(A)\cdot\lambda + det(A) = 0$$

Hvis $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

så er

$$\boxed{tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}$$

tr = trace (spor).

Merk:

Hvis A er $n \times n$-matrise med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, så har vi

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \\ tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \end{aligned}}$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$+(3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 0 \cdot \lambda + 3) = 0$$

$$(3-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 3) = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}$$