FORELESNING 15 — ELE 3719

EIVIND ERIKSEN — MAR 08 2012 — MATEMATIKK V.F.

PLAN: [MKF]

① Egenverdier og egenvektorer — 1.10

② Kvadratiske former — 2.1 – 2.2
klassifikasjon av deres type

---

① Egenverdier: λ egenverdi (eigenvalue) for A hvis

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \iff (A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$$

har løsninger $\underline{v} \neq \underline{0}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Resultat:} \\ \lambda \text{ eigenverdi} \iff \det(A - \lambda I) = 0\end{array}}$$

Eks 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ symmetrisk

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + (-3) = 0$$

$$(\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0)$$

$$\underline{\lambda = 3}, \quad \underline{\lambda = -1}$$

Eks 2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ikke symmetrisk

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda^2 = -1$ ingen (relle) løsn.

$\Downarrow$

<u>ingen egenverdier</u>

Resultat:

Hvis A er en symmetrisk $n \times n$-matrise, så har A n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Egenvektorer:

Hvis λ er egenverdi for A, så er løsningene $\underline{v}$ av likningen

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \iff (A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$$

egenvektorer for A med egenverdi λ.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Egenverdier: $\lambda_1 = \underline{3}$, $\lambda_2 = \underline{-1}$

Egenvektorer for $\lambda = 3$: $(A - 3I)\underline{v} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2v_1 + 2v_2 = 0$$
$$\cancel{2v_1 - 2v_2 = 0}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-2v_1 = -2v_2$$

$v_1 = v_2$
v_2 er fri

$-2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$
v_2 fri

Svar: Egenvektorer for $\lambda = 3$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer for $\lambda = -1$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad (A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$$

med $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\underline{2v_1 + 2v_2 = 0}\right\} \begin{array}{l} v_1 = -v_2 \\ v_2 \text{ er fri} \end{array}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{v_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{2v_1 + 2v_2 = 0}$$

$v_2 = -v_1$

v_1 er fri

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}} \quad \leftarrow$$

Også riktig å skrive egenvektorene på denne måten.

Konklusjon: Standard metode

1. Finn egenverdier (λ) ved å løse $|A - \lambda I| = 0$.
2. For hver egenverdi λ fra 1, finn egenvektorene ($\underline{v}$) ved å løse $(A - \lambda I) \cdot \underline{v} = \underline{0}$.

Kvadratiske former

Defn: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\underline{x})$; $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

funksjon i $\underline{n}$ variable

En kvadratisk form $Q(\underline{x})$ er en polynomfunksjon i n variable der hvert ledd har grad to.

Eks:
$n=1$ $\quad Q(x_1) = a \cdot x_1^2$

$n=2$ $\quad Q(x_1, x_2) = c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2$

$n=3$ $\quad Q(x_1, x_2, x_3) = c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{13} x_1 x_3 + c_{22} x_2^2 + c_{23} x_2 x_3 + c_{33} x_3^2$

Eks: $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - x_3^2$

Matriseform:

Eks: $\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = (x_1 \; x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

$= x_1 \cdot (x_1 + 2x_2) + x_2 \cdot (2x_1 - x_2)$

$= x_1^2 + \underbrace{2x_1 x_2 + 2x_2 x_1} - x_2^2$

$= x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2$

Resultat: Enhver kvadratisk form $Q(\underline{x})$ i n variable kan skrives som

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

der $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$ er en $n\times n$-matrise.

Hvis $Q(\underline{x}) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \dots + c_{nn}x_n^2$,

så må $\begin{cases} a_{ij} + a_{ji} = c_{ij} & \text{hvis } i<j \\ a_{ii} = c_{ii} & \end{cases}$

Vi ønsker at A er symmetrisk, og da må vi velge $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$ for $i<j$.

Eks: $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$

$$= (x_1\ x_2\ x_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

Merk: Det fins alltid eksakt én matrise A som er symmetrisk slik at $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$.

A kalles den symmetriske matrisen til Q.

Typer (definiteness) av kvadratiske former:

$Q(\underline{x}) = Q(x_1, \dots, x_n)$ kvadratisk form, med symm. matrise A

Defn: Vi sier at Q er

* positiv semidefinit hvis $Q(\underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x}$.
* negativ semidefinit hvis $Q(\underline{x}) \leq 0$ for alle $\underline{x}$
* indefinit hvis Q hverken er positiv eller negativ semidefinit
  (dvs: det fins to punkter $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ slik at $Q(\underline{x}_1) > 0$ og $Q(\underline{x}_2) < 0$)

* positiv definit hvis $Q(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$
* negativ definit hvis $Q(\underline{x}) < 0$ — " —

Merk: $Q(\underline{0}) = 0$ for alle kvadratiske former.

Merk: Q positiv (semi)definit $\Rightarrow$ $\underline{x} = \underline{0}$ minimum
Q negativ (semi)definit $\Rightarrow$ $\underline{x} = 0$ maksimum

Eks: $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Resultat: Q har symm. matrise A med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Q pos. semidefinit $\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$

pos. definit $\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$

Q neg. semidefinit $\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq 0$

neg. definit $\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$

Q indefinit $\Leftrightarrow$ det fins egenverdier som er både pos. og neg.

Oppg: Sjekk typen til de kvadr. formene i eks. ovenfor.

Svar: Eks I: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 7$

Q (og A) er positiv definit

Eks 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(-1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda) = 0$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$

Q (og A) er indefinit