# FORELESNING 16

# ELE 3719

EIVIND ERIKSEN    MAR 13 2012    MATEMATIKK VF

PLAN:

1. Kvadratiske former: Derivasjon og optimering
2. Utvidelse til andregradsfunksjoner
3. Anvendelse: Lineær regresjon

Husk: Eksamensoppgaver torsdag

Oppgaveark 17:

Oppgave 17 Vis at: i) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ; ii) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$ — $A, B$ invertible $n \times n$-matrise, $r \neq 0$

Husk:
$A^{-1}$ tilfredstiller
$\underbrace{A \cdot A^{-1} = I = A^{-1}A}$

i) $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$
$= A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \underline{I}$ ok.

$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \cdot A^{-1} A \cdot B$
$= B^{-1} I B = B^{-1}B = \underline{I}$ ok

$\Downarrow$

$\underline{B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}}$

ii) $(rA) \cdot \frac{1}{r}A^{-1} = r \cdot \frac{1}{r} AA^{-1}$
$= 1 \cdot I = \underline{I}$ ok.

$(\frac{1}{r}A^{-1})(rA) = \frac{1}{r} \cdot r \cdot A^{-1}A$
$= 1 \cdot I = I$ ok. $\Rightarrow (rA)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Oppgave 4: $Q(x_1, x_2) = \cancel{x_1 x_2} \; 4 \cdot x_1 \cdot x_2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u+v \\ x_2 &= u-v \end{aligned}\right\} \quad Q = 4x_1x_2 = 4(u+v)(u-v)$$

$$= 4(u^2 - v^2)$$

$$= \underline{4u^2 - 4v^2}$$

indefinit

$$Q = 4x_1x_2 = (x_1 \quad x_2) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 4 = 0 \qquad \lambda = \underline{\pm 2} \qquad \lambda_1 = \underline{2}, \; \lambda_2 = \underline{-2}$

(indefinit)

$\Downarrow$

$Q = 2u^2 - 2v^2$

for et variabelskifte

# Derivasjon av kvadratiske former

$Q(x_1 \dots x_n) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$ , der $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ og A er en symmetrisk matrise

**Eks:** $Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2 = \underline{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

med $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

## Kan regne ut de partielle deriverte:

$$\begin{cases} Q_1' = \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = 4x_2 \\ Q_2' = \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = 4x_1 \end{cases}$$

**Skrivemåte:**

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4x_2 \\ 4x_1 \end{pmatrix}}}$$

**Resultat:**

Hvis $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ , så er

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = (A + A^T)\, \underline{x}}$$

Hvis A er symmetrisk , så er $\dfrac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = 2A \cdot \underline{x}$.

**Eks:**

$Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2 = \underline{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = 2A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4x_2 \\ 4x_1 \end{pmatrix}}}$$

Eks: $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$

$$= \underline{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = 2A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \cdot x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}$$

Kvadratiske funksjoner: = andregradsfunksjoner

Eks:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3}_{} + \underbrace{x_1 - 2x_2 + 3x_3}_{} + 7$$

$$= \underline{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} + 7$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kvadratisk form}}}{Q(\underline{x})} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lineær form}}}{L(\underline{x})} + c$$

$\underline{x}^T A \underline{x}$ $\qquad$ $B \cdot \underline{x}$

A $n \times n$-matr. symmetrisk

B $1 \times n$-matr.

Resultat:

Hvis $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B \cdot \underline{x} + c$, der $A$ er en symmetrisk $n \times n$-matrise, $B$ er en $1 \times n$-matrise og $c$ er et tall, da er

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \overset{?}{=} 2A \cdot \underline{x} + B^T}$$

Eks: $f(x_1, x_2) = \underbrace{x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2} + \underbrace{3x_1 + 2x_2} + \underbrace{3}$

$$= \underline{x}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underline{x} + \underbrace{(3 \quad 2)}_{B} \cdot \cancel{\underline{x}} + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2A \cdot \underline{x} + B^T = \underline{0}$$

$$2A\underline{x} = -B^T$$

$$\underline{x} = -(2A)^{-1} \cdot B^T$$

$$= -\frac{1}{2} A^{-1} B^T$$

$$2x_1 + 16x_2 + 3 = 0$$
$$16x_1 + 2x_2 + 2 = 0$$

# Stasjonære pkt for kvadratisk funksjon

$$\boxed{2A\underline{x} + B^T = \underline{0}}$$

$|A| \neq 0$ $\downarrow$

$$\underline{x} = -\frac{1}{2} A^{-1} \cdot B^T$$

(ett stasjonært pkt)

$|A| = 0$ $\searrow$

ingen stasj. pkt eller uendelig mange stasj. pkt.

## Type stasjonære pkt:

Hvis $|A| \neq 0$ slik at vi har ett stasjonært pkt

$\underline{x} = -\frac{1}{2} A^{-1} B^T$. Da har vi:

| | | |
|---|---|---|
| A pos. definit | $\Longleftrightarrow$ | $\underline{x}$ er minimum |
| A neg. definit | $\Longleftrightarrow$ | $\underline{x}$ er maksimum |
| A indefinit | $\Longleftrightarrow$ | $\underline{x}$ er sadelpkt. |

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ (se forrige side)

$|A| = 1 - 64 = -63 \neq 0$

$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -63$

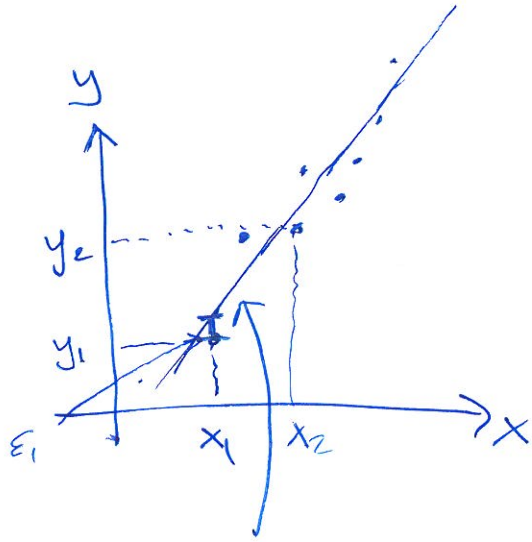
$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ har motsatte fortegn

$\Rightarrow A$ indefinit $\Rightarrow$ $\underline{x} = -\frac{1}{2} A^{-1} B^T$ er sadelpkt

# Lineær regresjon:

Eks: $y$ = boligpris (kr)

$x$ = størrelse (kvm)




Finn lineære funksjon

$$\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 x}$$

som tilnærmer dataene best mulig.

## Minste kvadraters metode:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n$$

Når dataene

| | |
|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_n$ | $y_n$ |

er gitt, finn de tallene

$\beta_0, \beta_1$ som er slik at feilen blir minst mulig.

$$\text{feilen} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

<u>Modell:</u> $y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

| y | X |
|---|---|
| $y_1$ | $x_1$ |
| $y_2$ | $x_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_n$ | $x_n$ |

Datasettet er gitt

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \cdot \underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad \begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{y} = X \cdot \underline{\beta} + \underline{\varepsilon}}$$ der $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{y} - X \cdot \underline{\beta} \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \dots\ \varepsilon_n) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} = (\underline{y} - X\underline{\beta})^T \cdot (\underline{y} - X\beta)$$

$$= (y^T - \beta^T X^T)(y - X\beta)$$

$$= y^T y - \underbrace{\underline{\beta}^T X^T \underline{y}}_{= y^T X \underline{\beta}} - y^T X \underline{\beta} + \underline{\beta}^T X^T X \underline{\beta}$$

## Konklusjon:

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\dots+\varepsilon_n^2 = \underbrace{\underline{y}^T\underline{y}}_{=\,c} \div 2\underbrace{\underline{y}^T X\underline{\beta}}_{=\,B\cdot\beta} + \underbrace{\underline{\beta}^T(X^TX)\underline{\beta}}_{=\,\underline{\beta}^T\cdot A\cdot\underline{\beta}}$$

- kvadratisk funksjon i $\underline{\beta}$
- finn $\underline{\beta}$ slik at denne funksjonen får minst mulig verdi

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\min_{\underline{\beta}} \quad \underline{\beta}^T(X^TX)\underline{\beta} - 2\underline{y}^TX\underline{\beta} + \underline{y}^T\underline{y}}$$