FORELESNING 18 ELE 3719

EIVIND ERIKSEN MAR 20 2012 MATEMATIKK VF.

PLAN:

① EVT. OPPGAVER MATKISER

② DIFF. LIKNINGER { – Generelt – Separable } { – Forelesningsnotat – Øby: "Differential eq's" }

② Differensial-likninger = diff. likninger

Definisjon: En diff. likning er en likning som inneholder deriverte.

Eks:
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= 2y \\ \dot{y} &= \ln y + t \end{aligned}}$$

Underforstått: Vi skal finne $y = y(t)$ som passer i likningen (løsning)

$$y'(t) = 2 \cdot y(t)$$
$$\dot{y}(t) = \ln y(t) + t$$

Skrivemåte: $\dot{y} = y'$ men det er underforstått at variabelen er t (tid)

Eks: Befolkeringveksten er 3%, og var konstant.

Betyr: $p(t)$ er befolkning ved tidspunktet t

$$\boxed{\dot{p} = 0.03 \cdot p}$$

Løsning: $p(t) = C \cdot e^{0.03t}$ er en løsning fordi:

VS: $\dot{p} = \left(Ce^{0.03t}\right)' = C \cdot e^{0.03t} \cdot 0.03$

H.S.: $0.03p = 0.03 \cdot \left(C \cdot e^{0.03t}\right)$ // ok

Generell løsning: – Inneholder alle løsninger av diff. likningen
– Dersom diff. likningen har orden I, dvs at $\dot{y}$ er med i diff. likningen, men ikke høyere ordens deriverte, da avhenger den generelle løsningen av en parameter C.

Enkle diff. likninger av første orden

Eks: $\dot{y} = 3t + 1$

$y = \int 3t+1 \, dt$

$= 3 \cdot \frac{1}{2}t^2 + 1 \cdot t + C$

$\underline{\underline{y = \frac{3}{2}t^2 + t + C}}$ (generell løsning)

Hvis diff.likningen ser ut som

$\dot{y} = F(t)$

Så kan den løses på denne måten (ved enkel integrasjon)

Eks: $\dot{y} = 3t+1$, $y(0) = 1$ ← Initialverdiproblem (startverdi ")

$\Updownarrow$

$t=0, y=1$

Løser diff.likningen:

$\dot{y} = 3t+1 \implies y = \int 3t+1 \, dt = \frac{3}{2}t^2 + t + C$

$y(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + C$

Setter inn $y(0)=1$: $1 = \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 0 + C$

$\underline{C = 1}$

$\underline{\underline{y = \frac{3}{2}t^2 + t + 1}}$

1) Separable diff. likninger

Defn: En diff. likning er <u>separabel</u> hvis den <u>kan</u> skrives som

$$\boxed{y' = f(y) \cdot g(t)}$$

Eks: Er disse separable?

i) $y' = y + t$ ← <u>Nei.</u>

ii) $y' = y \cdot t$ <u>Ja.</u> $f(y) = y$ $g(t) = t$

iii) $y' = 0.03 \cdot y$ <u>Ja.</u> $f(y) = y$ $g(t) = 0.03$

iv) $y \cdot y' = t\ln(t) \Rightarrow y' = \dfrac{t \cdot \ln(t)}{y}$ JA.

$$= \frac{1}{y} \cdot t\ln(t) \qquad f(y) = \frac{1}{y}$$

$$g(t) = t\ln(t)$$

Metode for å løse separable diff. likninger

$$y' = f(y) \cdot g(t) \qquad | : f(y)$$

Separert form

$$\frac{1}{f(y)} \cdot y' = g(t)$$

$$\int \frac{1}{f(y)} \cdot y' \cdot dt = \int g(t)\, dt$$

$$\int \frac{1}{f(y)} \cdot dy = \int g(t)\, dt$$

Substitusjon:

$y = y(t)$

$dy = y' \cdot dt$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dt}}$$

Vi må regne ut de to integralene

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(t)\,dt$$

og så bruke likningen til å finne y eksplisitt.

Eks: $y' = \frac{2t}{e^y} = 2t \cdot e^{-y} = e^{-y} \cdot (2t)$

$$\frac{1}{e^{-y}} \cdot y' = 2t$$

$$e^y \cdot y' = 2t$$

$$\int e^y \cdot \underbrace{y' \cdot dt}_{\frac{dy}{dt} \cdot dt = dy} = \int 2t\,dt$$

Separert form

$$\int e^y\,dy = \int 2t\,dt$$

$$e^y + C_1 = t^2 + C_2$$

C_1, C_2 int. konstanter

$$\boxed{e^y = t^2 + C}$$

$(C = C_2 - C_1)$

løsning på implisitt form

$$\ln(e^y) = \ln(t^2 + C)$$

$$\underline{\underline{y = \ln(t^2 + C)}}$$

Eg: $y' = 0.03y \quad , \quad y(0) = 10{,}000$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 0.03$$

$$\int \frac{1}{y} \underbrace{y' \, dt}_{dy} = \int 0.03 \, dt$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int 0.03 \, dt$$

$$\ln|y| = 0.03t + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{0.03t + C}$$

$$|y| = e^{0.03t} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{0.03t} \cdot e^{C}$$

$$y = K \cdot e^{0.03t}$$

$$K = \pm e^{C}$$

Initial bet: $y(0) = 10{,}000$

$t = 0, \; y = 10{,}000$

$$10{,}000 = K \cdot e^{0.03 \cdot 0}$$

$$10{,}000 = K \cdot 1 = K$$

$K = 10{,}000 \implies y(t) = 10{,}000 \cdot e^{0.03t}$

Oppgaver: Løs

i) $\ln y \cdot y' = 1$

ii) $y' = 1 + t + y + ty$

Hint: $\int \ln y \, dy = \int 1 \cdot \ln y \, dy$

Løsning:

i) $\ln y \cdot y' = 1$

$$\int \ln y \cdot y' \, dt = \int 1 \, dt$$

$$\int \ln y \, dy = \int 1 \, dt$$

$$\int \ln y \, dy = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln y} \, dy$$

$$= u \cdot v - \int u \cdot v' \, dt$$

$$= y \cdot \ln y - \int y \cdot \frac{1}{y} \, dt$$

$$= y \ln y - y + C$$

$$y \ln y - y = t + C$$

$$y \cdot (\ln y - 1) = t + C$$

(ikke mulig å finne eksplisitt løsning)

ii) $y' = 1 + t + y + ty$

$$y' = (1+t) \cdot (1+y)$$

$$\frac{1}{1+y} y' = 1 + t \quad \Rightarrow \int \frac{1}{1+y} \, dy = \int (1+t) \, dt$$

$$\ln |1+y| = \frac{1}{2}t^2 + t + C$$

$$1 + y = \pm e^{\frac{1}{2}t^2 + t + C} = k e^{\frac{1}{2}t^2 + t}$$

$$y = k e^{\frac{1}{2}t^2 + t} - 1$$