FORELESNING 2

ELE 3719
MATEMATIKK VALGFAG

EIVIND ERIKSEN, JAN 19 2012

PLAN:

① Repetisjon: { Mengder, Sannsynlighetsmål } — [R] 1.1 – 1.3

② Betinget sannsynlighet og uavhengige begivenheter — [R] 1.4 – 1.6

---

① Repetisjon:

a) Mengder og Venn-diagram

Eks: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

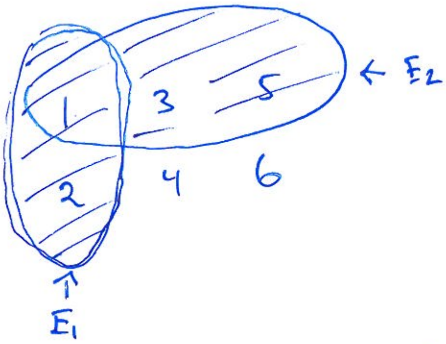
$E_1 = \{1,2\}$
$E_2 = \{1,3,5\}$

$E_1, E_2 \subseteq S$
(delmengder av S)

Union:

$E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,5\}$

utfall enten i E_1 eller E_2 (eller begge)

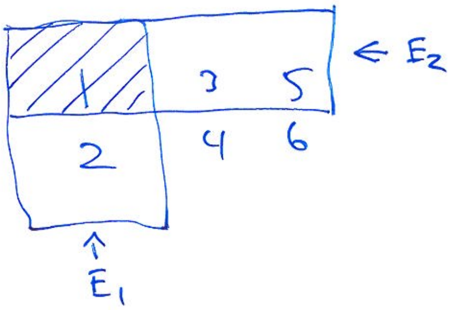


Venn-diagram med union skravert

Snitt: $E_1 E_2$

$E_1 \cap E_2 = \{1\}$

utfall både i E_1 og E_2

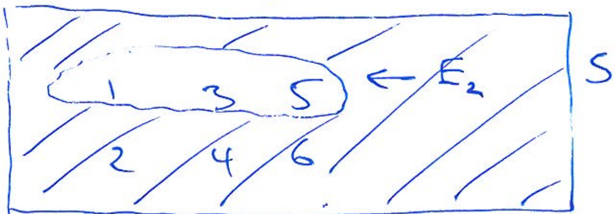


Venndiagram med snitt skravert

Komplement: (i S)

$E_2^{\,c} = \{2,4,6\}$

utfall ikke i E_2



Venndiagram med E_2^c (i S) skravert.

b) Sannsynligheter / sannsynlighetsmål

Et sannsynlighetsmål på et stokastisk forsøk med utfallsrom S er en funksjon p som til enhver delmengde $E \subseteq S$ (en hendelse eller begivenhet) tilordner en tallverdi $p(E)$

$$\underset{\text{(begivenhet)}}{E} \rightsquigarrow \underset{\text{(tall)}}{p(E)}$$

slik at:

i) $0 \leq p(E) \leq 1$ for alle begivenheter E

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_n \cup \ldots) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots + p(E_n) + \ldots$ når $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ er begivenheter som er parvis disjunkte ($E_i \cap E_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$)

Når vi har funnet fram til sannsynlighetene i et konkret ~~fysisk~~ stokastisk forsøk, skal de tilfredsstille kravene til sannsynlighetsmål ovenfor.

Viktige konsekvenser:

a) $p(E^c) = 1 - p(E)$

b) $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

c) Hvis $E = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ er begivenheten som består av utfallene $s_1, s_2, \ldots, s_n$, så er

$$p(E) = p(s_1) + p(s_2) + \ldots + p(s_n)$$

2) Betinget sannsynlighet [R] 1.4–1.6
Uavhengige begivenheter

Eks: Vi er rød og en blå terninger

E_1 : summen er seks $p(E_1) = \frac{5}{36}$.

E_2 : —— " —— sju $p(E_2) = 6/36 = 1/6$

F : blå terning viser 4 $p(F) = \frac{1}{6}$.

Hva er $p(E_1 \cap F)$? $p(E_1 \cap F) = \frac{1}{36}$.

—— " —— $p(E_2 \cap F)$? $p(E_2 \cap F) = 1/36$

blå \ rød	1	2	3	4	5	6
1					•	•
2				•	•	
3			•	•		
4	•	•	•	•	•	•
5	•	•				
6	•					

$$p(E_1 \cap F) \neq p(E_1) \cdot p(F)$$
$$\frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6}$$

$$p(E_2 \cap F) = p(E_2) \cdot p(F)$$
$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Defn: To begivenheter E og F er <u>uavhengige</u> hvis $p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$.

Betinget sannsynlighet

E, F er to hendelser / begivenheter

$$p(E|F) := \frac{p(E\cap F)}{p(F)}$$

sannsynligheten for E gitt F

Eks: $p(F|E_1) = \frac{1}{5}$ $\quad p(F|E_2) = \frac{1}{6}$

(forrige side)

p(blå terning viser 4 gitt at summen er seks)

p(blå terning viser 4 gitt at summen er 7)

Viktig formel:

$p(E\cap F) = p(F) \cdot p(E|F)$ ← gjelder alltid

$p(E\cap F) = p(F) \cdot p(E)$ ← hvis E og F er uavhengige begivenh.

$p(E) = p(E|F) \iff$ E og F er uavhengige

Eks: Kun Eriksen og Foss kan svare på et spørsmål om sannsynlighetsregning.

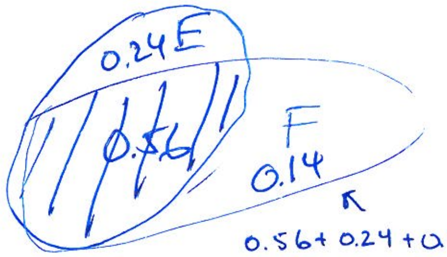
E = Eriksen er tilstede $\quad p(E) = 0.80$

F = Foss er tilstede $\quad p(F) = 0.70$

$p(E \cap F) = 0.56$

Hva er sannsynligheten for at minst én av de to er tilstede? $p(E \cup F)$

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$
$$= 0.8 + 0.7 - p(E \cap F)$$
$$= 0.8 + 0.7 - 0.56$$
$$= 1.5 - 0.56$$
$$= \underline{\underline{0.94}}$$



$0.56 + 0.24 + 0.14 = 0.94$

Bonferroni's ulikhet: $\boxed{\text{Oppg. 8 i [E] Kap. I}}$

$$p(E \cap F) \geq p(E) + p(F) - 1 \quad \text{for alle begivenheter } E \text{ og } F.$$

$$0.56 \qquad 0.8 + 0.7 - 1$$

Vi vet:

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

Skal frem til:

$$p(E \cap F) \geq p(E) + p(F) - 1$$
$$1 \geq p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$
$$1 \geq p(E \cup F)$$

Bevis:

$$1 \geq p(E \cup F) \Rightarrow 1 \geq p(E) + p(F) - p(E \cap F) \Rightarrow \underline{\underline{p(E \cap F) \geq p(E) + p(F) - 1}}$$

Bayes' lov:

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)\cdot p(F)}{p(E|F)\cdot p(F) + p(E|F^c)\cdot p(F^c)}$$

Utledning:

$$p(F|E) = \frac{p(F\cap E)}{p(E)} = \frac{p(E\cap F)}{p(E)} = \frac{p(E|F)\cdot p(F)}{p(E\cap F) + p(E\cap F^c)}$$

$$= \frac{p(E|F)\cdot p(F)}{p(E|F)\cdot p(F) + p(E|F^c)\cdot p(F^c)}$$

Siden $F \cup F^c = S$ og $F\cap F^c = \emptyset$ (disjunkte) så er

$$\begin{cases} (E\cap F) \cup (E\cap F^c) = E \\ E\cap F \text{ og } E\cap F^c \text{ er disjunkte} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$p(E) = p(E\cap F) + p(E\cap F^c)$$

Variant: Hvis $F_1, F_2, \ldots, F_n$ er parvis disjunkte og $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$, så er

$$p(F_i|E) = \frac{p(E|F_i)\cdot p(F_i)}{p(E|F_1)\cdot p(F_1) + \ldots + p(E|F_n)\cdot p(F_n)}$$

(Tilfellet $n=2$ og $F_2 = F_1^c$ er det vanlige tilfellet ovenfor)

Eks: Vi ser på en diagnostisk test som skal avsløre en bestemt sykdom.

T = testen slår positivt ut

S = personen har sykdommen

S^c = personen har <u>ikke</u> sykdommen.

$$p(T \mid S) = 0.95 \qquad p(S) = 0.005$$

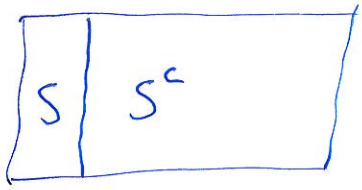
$$p(T \mid S^c) = 0.01$$

$$p(S \mid T) = ?$$

$$p(S \cap T) = \boxed{\begin{aligned} &p(S \mid T) \cdot p(T) \\ = \; &p(T \mid S) \cdot p(S) \end{aligned}}$$

$$p(S \mid T) = \frac{p(T \mid S) \cdot p(S)}{p(T)} = \frac{p(S \cap T)}{p(T)}$$

$$p(S \mid T) = \frac{0.95 \cdot 0.005}{\boxed{p(T \mid S) \cdot p(S) + p(T \mid S^c) \cdot p(S^c)}}$$



$$T = (T \cap S) \cup (T \cap S^c)$$

Bayes' lov:

$$\boxed{p(S \mid T) = \frac{p(T \mid S) \cdot p(S)}{p(T \mid S) \cdot p(S) + p(T \mid S^c) \cdot p(S^c)}}$$

Bayes' lov:

$\boxed{\text{To parvis disjunkte begivenheter } F_1, F_2 \text{ slik at } F_1 \cup F_2 = S}$

(Dette betyr at $F_2 = F_1^c$)

$$p(F|E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E|F) \cdot p(F)}{p(E|F) \cdot p(F) + p(E|F^c) \cdot p(F^c)}$$

Altså: $$P(S|T) = \frac{p(T|S)\cdot p(S)}{p(T|S)\cdot p(S) + p(T|S^c)\cdot p(S^c)}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995}$$

$$= \frac{95}{294} \cong \underline{0.32}$$

Gitt at testen slår positivt ut, er det ca 32% sannsynlighet for at man har sykdommen.

Etter Forelesning 1-2 kan dere gjøre Oppgavesett 1.