FORELESNING 20

ECE 3719

MATEMATIKK VF.

EIVIND ERIKSEN

MAR 27 2012

PLAN:

① ANDRE ORDENS LINEÆRE DIFF. LIKNINGER (med konstante koeffisienter)

Husk: Nytt kontor B4i – 032
Kontorstid: Onsdag 10–12 (som før)

① En andre ordens diff. likning har formen

$$y'' = F(t, y, y')$$

Eks: $y'' = 6t - 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$\Downarrow$

$y' = \int 6t - 4 \, dt = 3t^2 - 4t + C_1$

$y' = 3t^2 - 4t + C_1$

$\Downarrow$

$y = \int (3t^2 - 4t + C_1) \, dt$

$y = t^3 - 2t^2 + C_1 t + \overset{=0}{C_2}$

$y' = 3t^2 - 4t + C_1$

$y(0) = 0$:

$0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$y'(0) = 1$:

$1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$

$\Downarrow$

$y = t^3 - 2t^2 + t$

En andre ordens diff. likning er lineær hvis den kan skrives på formen

$$\boxed{y'' + a(t)\cdot y' + b(t)\cdot y = f(t)}$$

Likning klassifiseres slik:

* Konstante koeffisienter hvis $a(t) = a$, $b(t) = b$ er konstanter

* $\begin{cases} \text{homogen} & \text{hvis } f(t) \equiv 0 \\ \text{inhomogen} & \text{hvis } f(t) \not\equiv 0 \end{cases}$

$\boxed{f \equiv 0 \text{ betyr } f \text{ er nullfunksjonen}}$

Eks: $y'' + \underset{a}{\underset{\shortparallel}{3}}y' + \underset{b}{\underset{\shortparallel}{2}}y = \underset{f(t)}{\underset{\shortparallel}{te^t}}$ inhomogen

$y'' + 3y' + 2y = 0$ homogen

$$7y'' + y' - 3y = 4$$

$$\Downarrow$$

$$y'' + \frac{1}{7}y' - \frac{3}{7}y = \frac{4}{7}$$

a) Homogene med konstante koeffisienter:

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (a, b \text{ konstant})$$

Kvalifisert gjetning: $y = e^{rt}$ for en konstant r

Vi setter inn:

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{rt} \\ y' &= e^{rt} \cdot r \\ y'' &= e^{rt} \cdot r^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(e^{rt})r^2 + a \cdot (e^{rt} \cdot r) \\ &\quad + b \cdot (e^{rt}) = 0 \\ &e^{rt} \cdot (r^2 + ar + b) = 0 \\ &r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

Karakteristisk likning:

$$r^2 + ar + b = 0 \longrightarrow \text{Løsninger: } r = r_1, \; r = r_2$$

(karakteristiske røtter)

$r = r_1$ dobbelrot

ingen løsn. for r

Generell løsning:

a) Hvis $r = r_1$ og $r = r_2$ er to ulike karakteriske røtter, så er

$$y = \underline{C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}}$$

den generelle løsningen.

b) Hvis $r = r_1$ er en dobbelt karakteristisk rot, så er

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot te^{r_1 t}$$

den generelle løsningen.

c) Hvis $r^2 + ar + b = 0$ ikke har løsninger, så er den generelle løsningen

$$y = e^{\alpha t} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot \sin \beta t)$$

der $\alpha = -\frac{a}{2}$ og $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$.

(Husk: $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ og $a^2 - 4b < 0$

$$= \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}}}_{\beta} \sqrt{-1} \quad)$$

Eks: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$r_1 = \underline{2}, \quad r_2 = \underline{1}$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t}$$

Eks: $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

$$y = C_1 e^{t} + C_2 \cdot t e^{t}$$

Eks:

$$y'' - 4y' + 7y = 0$$

$$r^2 - 4r + 7 = 0 \implies r = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} \qquad \alpha = 2 \qquad = \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{-12}}{2}$$

ingen løsn. for r

Generell løsn:

$$y = e^{2t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t) \right)$$

b) Inhomogene med konstante koeffisienter

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

"Superposition principle":

Generell løsning av inhomogen lineær diff-likning:

$$y = y_h + y_p$$

der

i) y_h er den generelle løsn. av den homogene diff. likn.

$$y'' + ay' + by = 0$$

ii) y_p er en eller annen (partikulær) løsning av

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

Eks: $y'' - 3y' + 2y = 4$

lineær, andreordens
konstante koeff.
inhomogen ($f(t) = 4$)

$\Downarrow$

$\boxed{y = y_h + y_p}$

y_h: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \underline{r_1 = 1}, \underline{r_2 = 2}$

$y_h = \underline{C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$

y_p: $y'' - 3y' + 2y = 4$

$\underline{y_p = 2}$

Hvis $f(t)$ er en konstant, kan vi prøve $y_p = A$ (konst.)

Generell løsn: $y = y_h + y_p$

$= \underline{\underline{C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2}}$

Eks: $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$

$f(t) = e^{2t}$

$y = y_h + y_p = \underbrace{C_1 e^t + C_2 e^{2t}}_{y_h} + \underbrace{?}_{y_p}$

---

y_p: $\left.\begin{aligned} f(t) &= e^{2t} \\ f'(t) &= 2e^{2t} \\ f''(t) &= 4e^{2t} \end{aligned}\right\}$ Prøver $y_p = \underline{Ae^{2t}}$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$$

$$4Ae^{2t} - 3\cdot(2Ae^{2t}) + 2\cdot Ae^{2t} = e^{2t}$$

$$(4A - 6A + 2A)e^{2t} = e^{2t}$$

$$4A - 6A + 2A = 1$$

$$0\cdot A = 1$$

Ingen løsn.

Setter inn.

$$\begin{cases} y_p = Ae^{2t} \\ y_p' = 2\cdot Ae^{2t} \\ y_p'' = 4\cdot Ae^{2t} \end{cases}$$

Opprinnelig eksempel:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$$

Prøver $y = Ae^{2t}$, får ingen løsning.

$\Downarrow$

Prøver $y = \underline{A\cdot te^{2t}}$.

$\Downarrow$

Mye mer regning...

$$y' = Ae^{2t} + At\cdot e^{2t}\cdot 2 = (A + 2At)e^{2t}$$

$$y'' = 2Ae^{2t} + (A + 2At)e^{2t}\cdot 2 = (4A + 4At)e^{2t}$$

$$(4A + 4At)e^{2t} - 3(A + 2At)e^{2t} + 2(At)e^{2t} = e^{2t}$$

$$4A + 4At - 3A - 6At + 2At = 1$$

$$A + 0\cdot At = 1$$

$$\underline{A = 1}$$

$$y_p = 1\cdot te^{2t} = \underline{\underline{te^{2t}}}$$

Eksempel som burde vært valgt:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t} \Rightarrow y_p = Ae^{3t}$$

$$y' = 3Ae^{3t}$$

$$y'' = 9Ae^{3t}$$

$$9Ae^{3t} - 3(3Ae^{3t}) + 2(Ae^{3t}) = e^{3t}$$

$$(9A - 9A + 2A)\cancel{e^{3t}} = \cancel{e^{3t}}$$

$$2A = 1$$

$$\underline{A = 1/2}$$

$\Downarrow$

$$y_p = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}e^{3t}}}$$

Eks: $y' - 2y = 6$

integrerende faktor

$u = e^{-2t}$

$\downarrow$

$\vdots$

$$(y' - 2y)e^{-2t} = 6e^{-2t}$$

$$(ye^{-2t})' = 6e^{-2t}$$

$$ye^{-2t} = \int 6e^{-2t}\,dt$$

$$ye^{-2t} = -3e^{-2t} + C$$

$$y = \underline{-3 + Ce^{2t}}$$

Karakteristisk likning:

$$y = y_h + y_p$$

$$= Ce^{2t} + (-3)$$

$$= \underline{\underline{C \cdot e^{2t} - 3}}$$

y_h: $y' - 2y = 0$

$r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$

$y_h = \underline{Ce^{2t}}$

y_p: $y' - 2y = 6 \Rightarrow y_p = -3$