FORELESNING 21

EIVIND ERIKSEN — MAR 29 2012

ELE 3719

MATEMATIKK VF.

PLAN:

Variasjonsregning

Heftet [VAR]: Bjørnestad, "Enkel innføring i variasjonsregning" finnes på It's Learning.

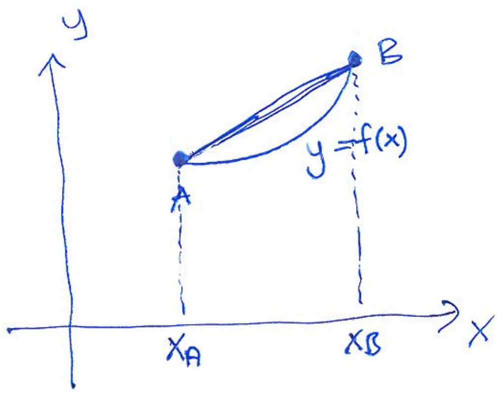
Repetisjon: Diff-likninger

- enkle diff.likninger: direkte integrasjon
- separable diff.likn.: separasjon + integrasjon
- lineære diff.likn.: første ordens – integrerende faktor; andre ordens (konstante koeff.) – karakteristisk likn. og superposisjon

Variasjonsregning: Maks/min-problemer for funksjonaler

Defn: En funksjonal tilordner et tall til en funksjon; $y \mapsto J(y)$

Eks:



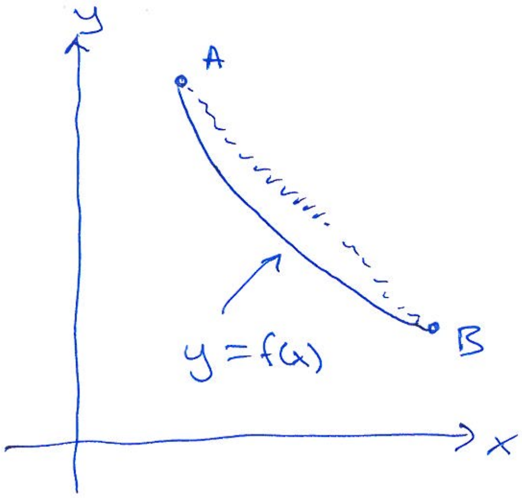
Hva er korteste vei mellom A og B?

Veilengde: $J(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

Vi må finne funksjonen y som er slik at J(y) blir minst mulig.

min J(y) når y er en funksjon som starter i A og slutter i B.

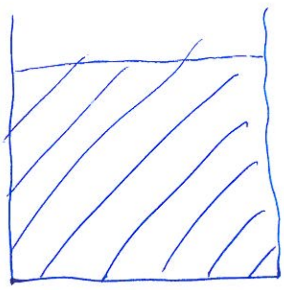
Eks:



Hvilken vei fra A til B er slik at en ball bruker minst mulig tid fra A til B når kun gravitasjon virker?

$$\min \ J(y)$$

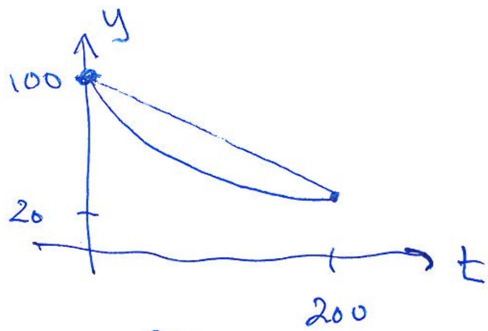
Eks: Utvinning av olje fra et reservoar.



Ved $t=0$: $y_0 = 100$ mbbl

$t=200$: $y = 20$ "

$y(t)$ = mengde olje ved tidspunkt t



$u(t) = -y'(t)$

utvinningsrate

(mbbl/døgn)

Profitt:

$$J(y) = \int_0^{200} \Big[\underbrace{p(t)\cdot u(t)}_{\text{inntekt}} - \underbrace{C(t,y,u)}_{\text{kostnad}}\Big]\,dt$$

Ønsker å velge $y(t)$ slik at profitten er maksimal.

Vi skal se på følgende funksjonaler:

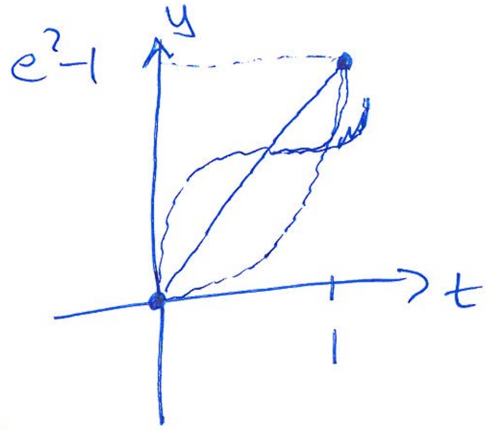
$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(t, y, y')\,dt$$, når y er en funksjon slik at

$$\boxed{\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y(b) &= y_1 \end{aligned}}$$

Finn max/min $\mathcal{J}(y)$.

Eks: $$J(y) = \int_0^1 -y^2 - \dot{y}^2\,dt$$, der $y(0) = 0$, $y(1) = e^2 - 1$

Finn y slik at $\mathcal{J}(y)$ er maks./min.



For hver funksjon y slik at $y(0) = 0$ og $y(1) = e^2 - 1$, kan vi regne ut $-y^2 - \dot{y}^2$ og dermed

$$J(y) = \int_0^1 -y^2 - \dot{y}^2\,dt$$

Hvilken y gir $\mathcal{J}(y)$ maks./min.?

Hvis $y(t) = (e^2 - 1)\cdot t$: $y' = e^2 - 1$

$$J(y) = \int_0^1 -(e^2-1)^2 t^2 - (e^2-1)^2\,dt = -(e^2-1)^2 \cdot \int_0^1 t^2 + 1\,dt$$

$$= -(e^2-1)^2 \cdot \left[\tfrac{1}{3}t^3 + t\right]_0^1 = \underline{\underline{-(e^2-1)^2 \cdot \tfrac{4}{3}}}$$

For variasjonsproblemer bruker vi betingelsen:

Euler-likningen:

$$F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{\dot y}) = 0$$

Eks: max/min $J(y) = \int_0^1 -y^2 - \dot y^2 \, dt$

når $y(0)=0$, $y(1)=e^2-1$.

$f(x) = 2x - x^2$

Hva er maks/min av f?

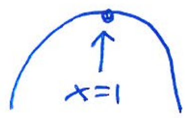
$$\boxed{f'(x) = 0}$$

$2 - 2x = 0$

$x = 1$

Løsningen er punktet $x=1$.
Det er maks siden f er konkav:

$f''(x) = -2 < 0$



$F = -y^2 - \dot y^2$:

$$\left.\begin{aligned} F'_y &= -2y \\ F'_{\dot y} &= -2\dot y \end{aligned}\right\}$$ partiell derivasjon som om y og $\dot y$ var formelle variable

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F'_{\dot y}) &= \frac{d}{dt}(-2\dot y) = -2 \cdot \frac{d}{dt}(\dot y) \\ &= -2\ddot y \end{aligned}\right\}$$ her må vi ta hensyn til at $\dot y = y'(t)$

Euler-likning: $F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{\dot y}) = 0$

$$\boxed{-2y + 2\ddot y = 0} \longleftarrow \text{diff. likning}$$

$2\ddot y - 2y = 0 \quad | :2$

$\ddot y - y = 0 \longleftarrow \boxed{\ddot y + a\dot y + by = 0}$

$r^2 - 1 = 0$

$r = \pm 1 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t}$

$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= e^2 - 1 \end{aligned}}$$

$0 = C_1 + C_2$

$\Rightarrow C_2 = -C_1$

$e^2 - 1 = C_1 \cdot e - C_1 e^{-1}$

$$c_1 \cdot (e - e^{-1}) = e^2 - 1$$

$$c_1 = \frac{(e^2-1)\cdot e}{(e-e^{-1})\cdot e} = \frac{e\cancel{(e^2-1)}}{\cancel{e^2-1}} = e$$

$$c_1 = e \qquad c_2 = -e$$

$$\Downarrow$$

$$y = e \cdot e^t + (-e)\cdot e^{-t}$$

$$y = e^{t+1} - e^{-t+1}$$

Spørsmål:

1) Er $y = e^{t+1} - e^{-t+1}$ maks, min eller ingen av delene for $J(y)$?

2) Hva er $J(e^{t+1} - e^{-t+1})$?

Oppgave: Regn ut $J(e^{t+1} - e^{-t+1})$.

$$y = e^{t+1} - e^{-t+1}$$

$$y' = e^{t+1}\cdot 1 - e^{-t+1}\cdot(-1) = e^{t+1} + e^{-t+1}$$

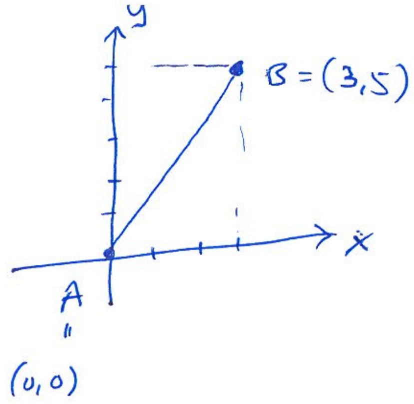
$$J(y) = \int_0^1 -y^2 - y'^2\, dt = \int_0^1 -(e^{t+1} - e^{-t+1})^2 - (e^{t+1} + e^{-t+1})^2\, dt$$

$$= \int_0^1 -e^{2(t+1)} \cancel{+ 2e^{t+1}\cdot e^{-t+1}} - e^{2(-t+1)} - e^{2(t+1)} \cancel{- 2e^{t+1} e^{-t+1}} - e^{2(-t+1)}\, dt$$

$$= \int_0^1 -2e^{2t+2} - 2e^{-2t+2}\, dt = \left[-e^{2t+2} + e^{-2t+2}\right]_0^1$$

$$= (-e^4 + e^0) - (\cancel{-e^2} + \cancel{e^2}) = \underline{\underline{1 - e^4}}$$

Eks: Hvilken er korteste vei mellom $A=(0,0)$ og $B=(3,5)$?



Løsn. ved hjelp av variasjonsregning:

Funksjonal:
$$J(y) = \int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Variasjonsproblem:
$$\boxed{\min J(y) \quad \text{når} \quad y(0)=0,\ y(3)=5}$$

Intuitiv løsning:

Rett linje $y = ax+b$
med $b=0$
$a = 5/3$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{3}x}$$

Avstand: $\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

Euler-likning: $F = \sqrt{1+(y')^2}$

$$F'_y = 0$$

$$F'_{y'} = \frac{1}{2}\left(1+(y')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' = \frac{\cancel{2}y'}{\cancel{2}\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \qquad \begin{cases} u = y' \\ v = \sqrt{1+(y')^2} \end{cases}$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{y'' \cdot \sqrt{1+(y')^2} - y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot y''}{1+(y')^2}$$

$$= \frac{y''\left(1+(y')^2\right) - (y')^2 \cdot y''}{\left(1+(y')^2\right)\cdot\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$$

utvider med $\sqrt{1+(y')^2}$ i teller og nevner

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot y''$$

Euler-likning: $F'_y - \frac{d}{dt}\left(F'_{y'}\right) = 0$

$$0 - \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$\underline{\underline{y'' = 0}}$$

Løsning av Euler:

$$\left.\begin{aligned} y'' = 0 &\Rightarrow y' = \int 0\,dx = a \\ &\Rightarrow y = \int a\,dx = ax+b \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{y = ax+b}}$$

Rett linje

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(3)=5 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} 0=a\cdot 0+b & \Rightarrow b=0 \\ 5=a\cdot 3+0 & \Rightarrow a=5/3 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \quad \underline{\underline{y=\frac{5}{3}x}}$$

<u>Avstand:</u> $$J(y)=\int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{1+(5/3)^2}\,dx$$

$$y'=5/3$$

$$=\int_0^3 \sqrt{\frac{9+25}{9}}\,dx=\left[\sqrt{\frac{34}{9}}\,x\right]_0^3=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{9}}\cdot 3=\underline{\underline{\sqrt{34}}}$$