FORELESNING 22

ELE 3719

EIVIND ERIKSEN   APR 10 2012   MATEMATIKK VF.

PLAN:

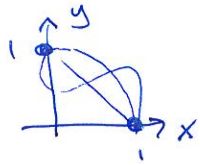
1. Variasjonsregning
2. Konvekse / konkave funksjoner

Repetisjon:

Standard variasjonsproblem: $\max/\min \int_a^b F(t, y, \dot{y})\, dt$ når $\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases}$

Eks: $\min \int_0^1 \underbrace{x y' + (y')^2}_{F}\, dx$ når $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(bruker x som variabel istedet for t)



Euler-ligningen:

Resultat:
Hvis $y^* = y^*(t)$ er en løsning av et variasjonsproblem, så tilfredstiller y^* Euler-likningen

$$\boxed{F'_y - \frac{d}{dt}\left(F'_{y'}\right) = 0}$$

Metode:
Vi finner Euler-likningen (en diff. likning i y) og løser den.

Kandidater for max/min i variasjonsproblemet.

Eks: $F(x, y, y') = x y' + (y')^2$

$F'_y = 0$

$F'_{y'} = x + 2y' \Rightarrow \frac{d}{dx}(x + 2y') = 1 + 2y''$

Euler: $0 - (1 + 2y'') = 0$

$-1 - 2y'' = 0$

$y'' = -\frac{1}{2}$

$y' = \int -\frac{1}{2}\, dx = -\frac{1}{2}x + C_1$

$y = \int -\frac{1}{2}x + C_1\, dx$

$= -\frac{1}{4}x^2 + C_1 x + C_2$

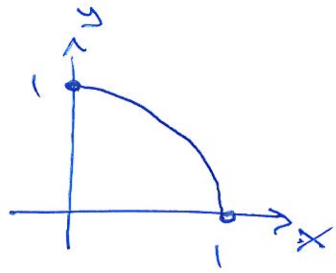
Euler-likningen gir $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1x + C_2$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{C_2 = 1} \\ y(1) &= -\frac{1}{4}\cdot 1 + C_1 \cdot 1 + 1 = 0 \\ & C_1 + 3/4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1 = -3/4} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\underline{y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1}$$



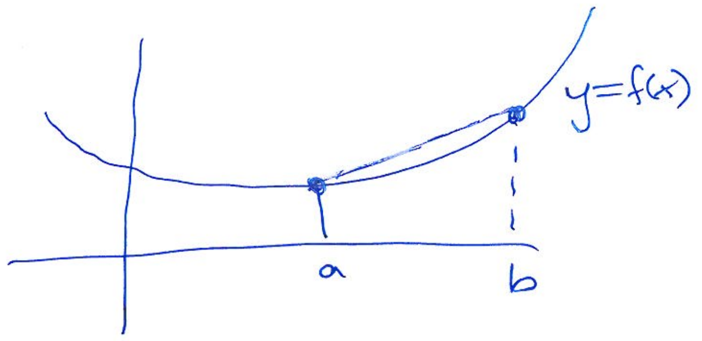
Kandidat til løsning av variasjonsproblemet

Problem:

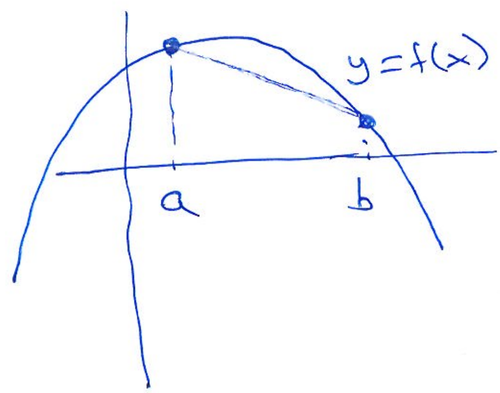
$$\min \int_0^1 \underbrace{xy' + (y')^2}_{F}\,dx \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Konvekse og konkave funksjoner.

a) Funksjoner i én variabel : $y = f(x)$



konveks



konkav funksjon

Defn:

$y = f(x)$ er konveks dersom den oppfyller følgende betingelse:

> Hvis $x=a$ og $x=b$ er to punkter på grafen til f, så ligger den rette linjen gjennom disse to pkt'ene over grafen.

$\Updownarrow$

$f''(x) \geq 0$ for alle x

> f konveks og $x=a$ stasjonært pkt ($f'(a)=0$)
>
> $\Downarrow$
>
> $x=a$ minimum (globalt)

$y = f(x)$ er konkav hvis den oppfyller følgende betingelse:

> Hvis $x=a$ og $x=b$ er to pkt. på grafen til f, så ligger den rette linjen gjennom pkt'ene under grafen

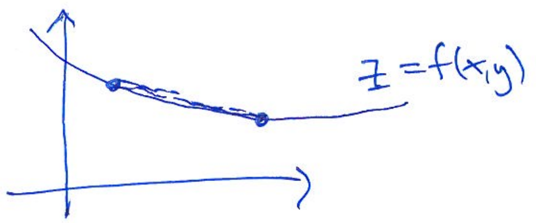
$\Updownarrow$

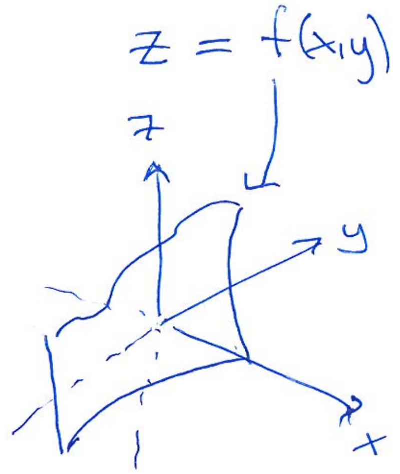
$f''(x) \leq 0$ for alle x

> f konkav og $x=a$ st. pkt ($f'(a)=0$)
>
> $\Downarrow$
>
> $x=a$ maksimum (globalt)

b) Funksjoner i to variable

Defn: samme som før





alle linjestykker mellom pkt på grafen til f

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{over grafen} \iff f \text{ konveks} \\ \text{under grafen} \iff f \text{ konkav} \end{array}}$$

over = over eller på

under = under eller på

Resultat:

$$f \text{ konveks} \iff \begin{cases} f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0 \\ f''_{xx},\ f''_{yy} \geq 0 \end{cases} \quad \text{for alle } x,y$$

$$f \text{ konkav} \iff \begin{cases} f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0 \\ f''_{xx},\ f''_{yy} \leq 0 \end{cases} \quad \text{for alle } x,y$$

Eks: $f(x,y) = 2x + 3y$

$f'_x = 2$

$f'_y = 3$

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx} = 0 \\ f''_{xy} = 0 \\ f''_{yy} = 0 \end{array}\right\} \text{ f både konveks og konkav.}$$

Eks: $f(x,y) = e^{2x+3y} = e^u$, $u = 2x+3y$

$$f'_x = e^{2x+3y} \cdot 2 = 2 \cdot e^u$$
$$f'_y = e^{2x+3y} \cdot 3 = 3 \cdot e^u$$

$$f''_{xx} = 2 \cdot e^u \cdot 2 = 4e^u > 0$$
$$f''_{xy} = 2 \cdot e^u \cdot 3 = 6e^u > 0$$
$$f''_{yy} = 3e^u \cdot 3 = 9e^u > 0$$

$f''_{xx} \geq 0$, $f''_{yy} \geq 0$

$$f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$
$$= 4e^u \cdot 9e^u - (6e^u)^2$$
$$= 36(e^u)^2 - 36(e^u)^2$$
$$= 0 \geq 0$$
$$\Downarrow$$
f konveks

Husk: $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$

$$= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

Eks: $f(x,y) = 2x^2 + 6xy - 9y^2$

$f'_x = 4x + 6y$

$f'_y = 6x - 18y$

$f''_{xx} = 4$

$f''_{xy} = 6$

$f''_{yy} = -18$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-18) - 6^2$$
$$= -72 - 36 = -108$$
$$\Downarrow$$
hverken konveks eller konkav

Symm. matrise til f:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = 2A}$$

Resultat: Anta $f(x,y) = (x\ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er en kvadratisk form med symmetrisk matrise A.

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ konveks} \iff A \text{ positiv semidefinit} \\ f \text{ konkav} \iff A \text{ negativ semidefinit} \end{array}}$$

Eks:

$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ pos. defn. $\Rightarrow$ konveks

$f(x,y) = -2x^2 - 4y^2$ neg. defn. $\Rightarrow$ konkav

Variasjonsproblemet: $\max/\min \int_a^b F(t,y,y')\,dt$ s.a. $y(a) = A$, $y(b) = B$

Metode:

i) Bruk F til å finne Euler likningen

ii) Finn den generelle løsn. av Euler-likn.

iii) Bestem C_1 og C_2 vha. $y(a) = A$ og $y(b) = B$.

$\Downarrow$

Én funksjon $y^*(t)$ som er kandidat til løsn.

Resultat:

Hvis $F(t,y,y')$ er konkav som funksjon i (y,y'), så er $y^*(t)$ maks.

Hvis $F(t,y,y')$ er konveks som funksjon i (y,y'), så er $y^*(t)$ min.

<u>Eks:</u> $\underline{\min} \int_0^1 xy' + (y')^2 \, dx$ når $\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=0 \end{cases}$

<u>Kandidat:</u> $y^* = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$

Se på $F = xy' + (y')^2$. Konveks/konkav i (y, y')?

$$\left.\begin{aligned} F'_y &= 0 \\ F'_{y'} &= x + 2y' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} F''_{yy} &= 0 \\ F''_{yy'} &= 0 \\ F''_{y'y'} &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & F''_{yy} \cdot F''_{y'y'} - (F''_{yy'})^2 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 \geq 0 \quad \text{ok} \end{aligned}$$

<u>Konveks:</u> $\underset{0}{F''_{yy}}, \underset{2}{F''_{y'y'}} \geq 0$ ok

<u>Konklusjon:</u>

F konveks som funksjon i (y, y') $\Leftarrow$

$\Downarrow$

$\underline{y^* = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1}$ er minimum

<u>Oppgave:</u> Eksamen 06/2011 Oppgave 4

Oppgave 4.

Vi ønsker å plante trær for å dekke et område på 30 kvadratkilometer i løpet av 4 år. La $y(t)$ være antall kvadratkilometer som er dekket etter t år, og la $\dot{y}(t)$ være plantehastigheten, målt i kvadratkilometer per år. Vi antar at kostnadsraten, målt i kr per år, er $C(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2$, der K er en positiv konstant. Den totale neddiskonterte kostnaden er da

$$\int_0^4 C(t, y, \dot{y})e^{-rt}\,\mathrm{d}t$$

der r er diskonteringsrenten.

(a) Vi ønsker å minimere den totale neddiskonterte kostnaden. Sett opp variasjonsproblemet dette leder til. Vil en løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene til variasjonsproblemet minimere den totale neddiskonterte kostnaden?
(b) Løs variasjonsproblemet. Hva blir den totale neddiskonterte kostnaden om diskonteringsrenten $r = 0.08$ og konstanten $K = 10.000$?

Oppgave 5.

La X være antall mål til hjemmelaget og Y være antall mål til bortelaget i løpet av en fotballkamp. Vi antar at X og Y er uavhengige stokastiske variable, at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_X = 2$, og at Y er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Y = 1$.

(a) Finn $P(X = x, Y = y)$, og regn ut sannsynligheten for hvert av resultatene 0-0, 1-0 og 2-1.
(b) Regn ut sannsynligheten $P(X = Y, X \leq 4)$. Gi en tolkning av denne sannsynligheten.
(c) Regn ut den betingede sannsynligheten $P(X = Y | X \leq 4)$.
(d) Finn sannsynligheten $P(X + Y \geq 2)$. Du vil tilby et veddemål der spilleren vinner d ganger innsatsen hvis det blir minst 2 mål, og taper innsatsen om det blir færre enn 2 mål. Hvor stor bør d være om veddemålet skal lønne seg for deg?

Oppgave 6.

La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy(x^2 + y^2) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Finn $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$, og sjekk at $f(x, y)$ er en sannsynlighetstetthet.
(b) Regn ut $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.
(c) Vis at $E[Y^n] = E[X^n]$ for $n \geq 1$, og bruk dette til å finne $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.
(d) Regn ut $E[XY]$ og $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
(e) Regn ut $P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2)$.