FORELESNING 4

ELE 3719

MATEMATIKK VALGFAG

EIVIND ERIKSEN   JAN 26 2012

Plan:

① Stokastiske diskret variable   [RJ] 2.2

ⓐ binomisk ⓑ geometrisk ⓒ Poisson – neste gang

En stokastisk variabel X er diskret hvis de mulige verdiene til X er en endelig eller tellbar mengde (dvs diskret).

Den kumulative fordelingsfunksjonen til X er definert som

$$F_X(b) = F(b) := P(X \leq b)$$

Sannsynlighetstettheten til X er definert som

$$f_X(b) = \underset{\overset{\shortparallel}{p(b)}}{f(b)} := P(X = b)$$

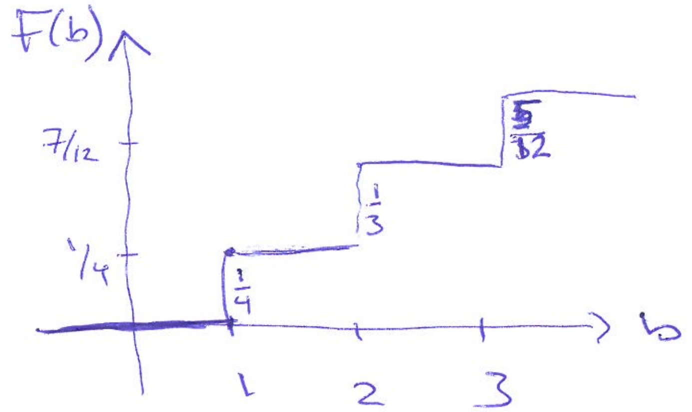
Dette kalles også punktsannsynlighet.

$$F(b) = \sum_{i \leq b} f(i)$$

Eks: X diskret stok. variabel

x	1	2	3
$p(x)$	$1/4$	$1/3$	$5/12$

$$\boxed{p(b) = 0 \text{ for } b \neq 1,2,3}$$



$p(X \leq 1) = p(X=1) = \frac{1}{4}$

$p(X \leq 2) = p(X=1) + p(X=2)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$p(X \leq 3) = 1$

Standard diskrete sannsynlighetsfordelinger

a) binomisk b) geometrisk c) Poisson

a) Binomisk (Parametre: n, p)

Spesialtilfelle: Bernoulli forsøk; (to mulige verdier)

(tilfelle $n=1$)

$$X = \begin{cases} 1 & p(X=1) = p \\ 0 & p(X=0) = 1-p \end{cases}$$

Eks: Vi kaster en mynt $n = 10$ ganger

$n=10$, $p=\frac{1}{2}$

X = antall kron; $X = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$

p (kron i et enkelt kast) $= p = 0.5$

$$\boxed{p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$$

$$p(X=2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.044 = 4.4\%$$

Kjennetegn ved en binomisk variabel:

- et stokastisk forsøk gjentas (n ganger)
- sannsynlighet for positivt utfall i én gjentagelse er p
- utfallet i én gjentagelse er uavhengig av utfallet i de andre gjentagelsene

$$\boxed{X = \text{antall positive utfall}}$$

Parametre: $\begin{cases} n : & \text{positivt heltall } 1, 2, 3, \ldots \\ p : & 0 \leq p \leq 1 \end{cases}$

$$\boxed{p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{for } i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n}$$

Binomialkoeffisienter: $\binom{n}{i} := \frac{n!}{(n-i)!\, i!}$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n$

$(0! = 1! = 1)$

Eks: $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\, 2!}$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdots 1}}{(\cancel{8 \cdot 7 \cdots 1})(2 \cdot 1)} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = \underline{45}$$

På kalkulator: $nCr = n$ choose r

$\boxed{nCr}$

Formel: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)(i-2)\cdots 1}$

Eks: $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1} = \underline{\underline{56}}$ (utregning for hånd)

$\binom{n}{i}$ = antall måter å velge i elementer fra en mengde på n elementer.

(utvalg uten tilbakelegging; uordnet)

Eks ovenfor: (Vi kaster mynt og kron, 10 ganger skal regne ut p(to kron))

Muligheter:

$$\left.\begin{matrix} KKMMMMMMMM \\ KMKM\cdots M \\ \vdots \\ MMM\cdots MKK \end{matrix}\right\} \binom{10}{2} = 45$$

måter å gjøre dette på

Tenk at vi har ti kuler, markert 1-10, og vi skal plukke ut to – tallene angir hvilke kast som skal gi K.

Dvs: $\boxed{\text{uordnet, uten tilbakelegging}}$

Eks: Vi kaster mynt og kron $n=3$ ganger, med $p=\frac{1}{2}$

X = antall kron

$$p(X=0) = \binom{3}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^3 = 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$$p(X=1) = \binom{3}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$p(X=2) = \binom{3}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^1 = 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3/8$$

$$p(X=3) = \binom{3}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^0 = 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 1/8$$

$$\overline{\quad 1 \quad}$$

$\binom{3}{0} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1$ $\quad\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$

$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ $\quad\binom{3}{3} = \frac{3!}{0!\,3!} = 1$

Binomial formel:

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

$a=p \quad b=1-p$: $\quad 1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

$$\boxed{1 = \sum_{i=0}^{n} p(X=i)}$$

Summen av sannsynlighetene er 1

(b) **Geometrisk:** Parameter: p

Egenskaper ved geometrisk stokastisk variabel:

- Vi gjentar et stokastisk forsøk
- Sannsynlighet for positivt uttall = p
- Uavhengige forsøk

X = antall gjentagelser til første positive uttall

Eks: Vi kaster en mynt til første gang vi får kron. $(p = 1/2)$

generell formel → $\boxed{p(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p}$

$$= (1-1/2)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = (1/2)^n$$

$\underbrace{MM \ldots M}_{n-1} K$

geometrisk sannsynlighetsfordeling

X geometrisk med parameter p $(0 \leq p \leq 1)$

$$p(X=i) = (1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p = p \cdot \left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots\right) = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = \underline{1}$$

(summen av sannsynlighetene er 1)