FORELESNING 7

ELE 3719

EIVIND ERIKSEN FEB 09 2011 MATEMATIKK VALGFAG

PLAN:

① Kort oppsummering: kontinuerlige fordelinger [R] 2.3
② Forventning : diskret / kont. tilfelle } [R] 2.4
③ Forventning av en funksjon - varians

— —

① Oppsummering:

X kontinuerlig stokastisk variabel

a) Kommulativ fordeling:

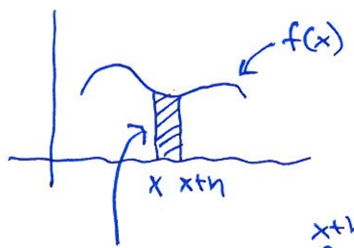
$F(b) = F_X(b) := p(X \leq b)$ tolkning som kumulativ sannsynlighet

b) Sannsynlighetstetthet:

$f(x) = f_X(x) := ?$

tolkning: $f(x) \neq p(X=x) = 0$
ikke punktsannsynlighet

Men: Hvis h er liten, så er
$p(x \leq X \leq x+h) \simeq h \cdot f(x)$



$p(x \leq X \leq x+h) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx$

$\simeq f(x) \cdot h$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{p(x \leq X \leq x+h)}{h}$

c) Viktig for praktisk regning:

* $F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

* $f(x) = F'(x)$

integrasjon av sannsynlighets-tetthet $f(x)$ er kontinuerlig versjon av å summere sannsynligheter

② Forventning (E = expectation = forventning)

$E[X]$ = forventningsverdien til X
= vektet gjennomsnittsverdi for X med sannsynlighetene som vekter

Vanlige skrivemåter: $E(X) = \overline{X} = \mu_X$

Diskret tilfelle:

$$E[X] := \sum_x x \cdot f(x) = \sum_x x \cdot p(X=x)$$

$$= x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_n \cdot f(x_n)$$

Sum over alle verdier x slik at $p(X=x) \neq 0$ dvs alle mulige verdier for X

Eks: Vi kaster en terning. X = antall øyne.

X	$p(X=x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{3.5}$$

Eks: Vi kaster to terninger. X = Summen

X	$p(X=x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	⋮
10	⋮
11	⋮
12	

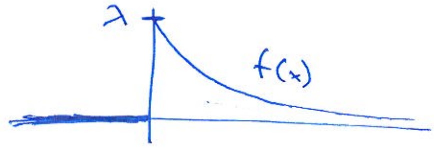
$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 12 \cdot 1}{36}$$

Kontinuerlige tilfelle:

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Eks: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{ellers} \end{cases}$



eksponensialfordeling (parameter $\lambda > 0$)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x \\ v &= -e^{-\lambda x} \end{aligned}}$$

$$= \left[uv\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u'v\, dx$$

$$= \left[-xe^{-\lambda x} + \int 1 \cdot e^{-\lambda x}\, dx\right]_0^{\infty}$$

$$= \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \Bigg(-\underbrace{\frac{\infty}{e^{\lambda \cdot \infty}}}_{=0} - \frac{1}{\lambda} \underbrace{\frac{1}{e^{\infty \lambda}}}_{=0}\Bigg) + 0 + \frac{1}{\lambda} \cdot e^0$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

egentlig:

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{x}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{e^{\lambda x}}\right) = 0$$

Forventning:

diskret	kontinuerlig
$E = \sum x \cdot f(x)$ $\quad \parallel$ $E(X)$	$E = \int x \cdot f(x)\, dx$ $\quad \parallel$ $E(X)$

Summerer/integrerer over alle x s.a. $f(x) > 0$

Forventning til en funksjon av X:

$g(X)$ = en funksjon i X

Hva er $E[g(X)]$?

Eks:

$Y = X^2$

$X =$	$p(X=x)$	$g(X) = X^2$
0	0.2	$0^2 = 0$
1	0.5	$1^2 = 1$
2	0.3	$2^2 = 4$

$E(X) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3$

$= \underline{1.1}$

$E(Y) = E(X^2)$

$= 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3$

$= 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3$

$= \underline{1.7}$

Definisjon: Forventningen til $g(X)$

Diskret: $$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot f(x)$$

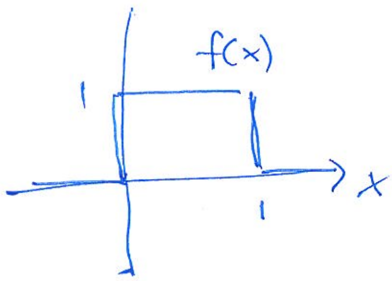
Eks: $g(X) = X^2 \Rightarrow E[X^2] = \sum_x x^2 \cdot f(x)$

Kontinuerlig: $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

Eks: $g(X) = X^2 \Rightarrow E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$

Eks: X uniform på $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$$

<u>Defn:</u> $E(X^n) =$ det n'te momentet til X

<u>Varians:</u>

$$\mathrm{Var}(X) := E[(X-\mu)^2] \qquad \mu = E(X) = \bar{X}$$

$$= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$= E[X^2] - E[2\mu X] + E(\mu^2)$$

$$= E[X^2] - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

<u>Eks:</u> X uniform på $[0,1]$.

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2} \\ E(X^2) &= 1/3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 1/3 - (1/2)^2 \\ &= 1/3 - 1/4 = 4/12 - 3/12 = \underline{\underline{1/12}} \end{aligned}$$

Noen viktige regneregler:

i) $E(aX+b) = aE(X) + b$ (a, b konstanter)

ii) $E(X^2) \neq E(X)^2$ (for de fleste X)

iii) $E(a \cdot g_1(X) + b \cdot g_2(X))$

$= a \cdot E(g_1(X)) + b \cdot E(g_2(X))$ (a, b konstanter)

iv) $Var(X) \geq 0$

v) $Var(aX) = a^2 \cdot Var(X)$ (a konstant)

Hva er $Var(aX+b)$?