Løsning Oppgaveark 6

OPPGAVE 1

Estimer β_0, β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ ut fra de to observasjonene

$$(x_1, y_1) = (0, 1)$$
$$(x_2, y_2) = (1, 0)$$

Kan du komme frem til svaret på en annen måte?

Vet at $\beta = (X^t X)^{-1}(X^t Y)$ er beste til presis om $|X^t X| \neq 0$.

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

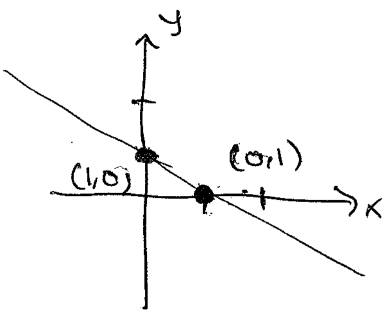
$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad (X^t X)^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$X^t Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \beta_0 = 1, \beta_1 = -1$

$\underline{\underline{Y = 1 - x}}$

<u>Alternativ:</u>



linjen gjennom de to punktene er $\underline{\underline{y = 1 - x}}$

OPPGAVE 2

Estimer β_0, β_1 og β_2 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \epsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$y_1 = 2, (x_{11}, x_{12}) = (1,1)$$
$$y_2 = 0, (x_{21}, x_{22}) = (1,0)$$
$$y_3 = 1, (x_{31}, x_{32}) = (0,0)$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{0-1+2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \underline{1 - x_1 + 2x_2}$$

$$\varepsilon_1 = y_1 - y(x_1) = 2 - 2 = 0$$
$$\varepsilon_2 = y_2 - y(x_2) = 0 - 0 = 0$$
$$\varepsilon_3 = y_3 - y(x_3) = 1 - 1 = 0$$

eller

$$\underline{\varepsilon} = Y - X \cdot \underline{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3

Estimer β_0, β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$(x_1, y_1) = (0, 1)$$
$$(x_2, y_2) = (1, 0)$$
$$(x_3, y_3) = (1, 1)$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(X^t X)^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = (X^t X)^{-1} (X^t Y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}}} \qquad \begin{aligned} \beta_0 &= 1 \\ \beta_1 &= -1/2 \end{aligned} \qquad y = 1 - (1/2) \cdot x$$

$$\underline{\varepsilon} = Y - X\underline{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}}$$

OPPGAVE 4

Estimer $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \epsilon$ ut fra observasjonene

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, y_1) = (13, 3, -1, 7)$$
$$(x_{21}, x_{22}, x_{23}, y_2) = (10, 14, 3, 8)$$
$$(x_{31}, x_{32}, x_{33}, y_3) = (2, 1, 5, 9)$$
$$(x_{41}, x_{42}, x_{43}, y_4) = (1, 4, 1, 3)$$
$$(x_{51}, x_{52}, x_{53}, y_5) = (4, 11, 3, 4)$$
$$(x_{61}, x_{62}, x_{63}, y_6) = (0, 0, 0, 4)$$

(Hint: Dersom du ikke har en kalkulator som kan regne med matriser, kan du for eksempel bruke Microsoft Mathematics).

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 3 & -1 \\ 1 & 10 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut: $\beta = (X^t X)^{-1} (X^t Y)$ vha kalkulator/PC og får:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1.067 \\ 0.606 \\ -0.196 \\ 1.125 \end{pmatrix}$$