Løsning: Oppgaveark 20

Handelshøyskolen BI — Institutt for samfunnsøkonomi

OPPGAVE 1

Finn den generelle løsningen i hvert tilfelle:

a) $y'' = t$

b) $y'' = e^t + t^2$

a) $y'' = t$

$y' = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C_1$

$y = \int \frac{1}{2}t^2 + C_1 \; dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}t^3 + C_1 t + C_2$

$y = \frac{1}{6}t^3 + C_1 t + C_2$

b) $y'' = e^t + t^2$

$y' = \int e^t + t^2 \; dt = e^t + \frac{1}{3}t^3 + C_1$

$y = \int e^t + \frac{1}{3}t^3 + C_1 \; dt = e^t + \frac{1}{12}t^4 + C_1 t + C$

OPPGAVE 2

Løs initialverdiproblemet $y'' = t^2 - t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$

$$y'' = t^2 - t$$

$$y' = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C_1$$

$$y = \underline{\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + C_1 t + C_2} \qquad \text{generell løsn.}$$

$y(0) = 1$: $\quad 1 = C_2 \quad \Rightarrow C_2 = \underline{1}$

$y'(0) = 1$: $\quad y' = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C_1$

$\quad 1 = C_1 \quad \Rightarrow C_1 = \underline{1}$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + t + 1}}$$

OPPGAVE 3

Løs initialverdiproblemet $y'' = y' + t$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$.

$y'' = y' + t \Rightarrow$ Setter $\begin{cases} u = y' \\ u' = y'' \end{cases}$

$u' = u + t$

$u' - u = t$ Int. faktor: e^{-t}

$(u \cdot e^{-t})' = te^{-t}$

$ue^{-t} = \int te^{-t}dt = t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t})dt$

$= -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} + C_1$

$u = -t - 1 + C_1e^{t}$

$y' = -t - 1 + C_1e^{t}$

$y = -\frac{1}{2}t^2 - t + C_1e^t + C_2$

$y(0) = 1$: $1 = C_1 e^0 + C_2 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$

$y'(1) = 2$: $y' = -t - 1 + C_1e^t \Rightarrow$

$2 = -1 - 1 + C_1e^1 \Rightarrow C_1 e = 4 \Rightarrow C_1 = 4/e$

$C_2 = 1 - 4/e = \frac{e-4}{e}$

$y = -\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{4}{e}e^t + \frac{e-4}{e}$

OPPGAVE 4

Finn i hvert enkelt tilfelle den generelle løsningen:

a) $y'' - 3y = 0$

b) $y'' + 4y' + 8y = 0$

c) $3y'' + 8y' = 0$

d) $4y'' + 4y' + y = 0$

e) $y'' + y' - 6y = 0$

Bruker karakteristisk likn. til å finne generell løsn:

a) $r^2 - 3 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}t}$

b) $r^2 + 4r + 8 = 0 \Rightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $\quad \alpha = -\frac{4}{2} = -2, \quad \beta = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$

$y = e^{-2t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$

$3y'' + 8y' = 0$ og $y'' + \frac{8}{3}y' = 0$ gir samme løsn. av kar. likn

c) $3r^2 + 8r = 0 \Rightarrow r = 0, r = -8/3$

$y = C_1 e^{0 \cdot t} + C_2 e^{-8/3 t} = C_1 + C_2 e^{-\frac{8}{3}t}$

d) $4r^2 + 4r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$

$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{1}{2}t}$

e) $r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r = 2, r = -3$

$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$

OPPGAVE 5

Løs differensiallikningen $y'' + y' - 6y = 7$.

Løsn: $y = y_h + y_p$

y_h: $y'' + y' - 6y = 0$

$r^2 + r - 6 = 0$

$r = 2, -3 \Rightarrow y_h = \underline{C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}}$

y_p: Velger $y = C$:

$0 + 0 - 6 \cdot C = 7 \Rightarrow C = 7/-6 = -7/6 \Rightarrow y_p = \underline{-\frac{7}{6}}$

$$y = \underline{\underline{C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - \frac{7}{6}}}$$

OPPGAVE 6

Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 10y' + 25y = 4$$

som tilfredsstiller $y(0) = 29/25$ og $y(1) = 2e^5 + 4/25$.

Generell løsn: $y = y_h + y_p$

y_h: $y'' - 10y' + 25y = 0$

$r^2 - 10r + 25 = 0$

$r = 5 \Rightarrow y_h = C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t}$

y_p: $y = C$ gir $0 + 0 + 25C = 4$

$\Rightarrow C = 4/25 \Rightarrow y_p = 4/25$

$y = C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t} + 4/25$

$y(0) = \frac{29}{25}$: $C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot 0 e^0 + 4/25 = 29/25$

$C_1 = 29/25 - 4/25 = 1$

$y(1) = 2e^5 + 4/25$: $\overset{1}{C_1} \cdot e^5 + C_2 \cdot 1 \cdot e^5 + 4/25 = 2e^5 + 4/25$

$e^5 + C_2 e^5 = 2e^5$

$C_2 = \frac{2e^5 - e^5}{e^5} = 1$

$y = \cancel{e^{5t} + (2e^4 - 1) t e^{5t} + 4/25}$

$$y = e^{5t} + te^{5t} + \frac{4}{25}$$

OPPGAVE 7

Ta utgangspunkt i differensiallikningen $y'' + ay' + by = 0$, og anta at $a^2 - 4b = 0$ slik at den karakteristiske likningen har en dobbelrot r. La $y(t) = u(t)e^{rt}$, og vis at $y(t)$ er en løsning av differensiallikningen hvis og bare hvis $u'' = 0$. Konkluder fra dette at $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$ er den generelle løsningen.

Anta $a^2 - 4b = 0$: $r = -\frac{a}{2}$ dobbelt rot

$y = u \cdot e^{rt}$

Setter inn i $y'' + ay' + by = 0$:

$y = ue^{rt}$

$y' = u' \cdot e^{rt} + u \cdot e^{rt} \cdot r = (u' + ru)e^{rt}$

$y'' = u''e^{rt} + u' \cdot e^{rt} \cdot r + u' e^{rt} \cdot r + u \cdot e^{rt} \cdot r^2$

$= (u'' + 2ru' + r^2 u) e^{rt}$

VS: $y'' + ay' + by = (u'' + 2ru' + r^2 u) e^{rt}$

$+ a \cdot (u' + ru) e^{rt} + b \cdot (ue^{rt})$

$= (u'' + 2ru' + r^2 u + au' + rau + bu) e^{rt}$

Setter inn $r = -\frac{a}{2}$ $\Updownarrow$ $a = -2r$ og $a^2 - 4b = 0$ $\Updownarrow$ $b = a^2/4 = r^2$

$= (u'' + 2ru' + r^2 u - 2ru' - 2r^2 u + r^2 u) e^{rt}$

$= u'' e^{rt}$

HS: 0

ok hvis og bare hvis VS = HS $\rightarrow$

$u'' e^{rt} = 0$

$u'' = 0$

$u'' = 0$

$u' = \int 0 \, dt = A$

$u = \int A \, dt = At + B$

$\Downarrow$

$y = ue^{rt}$

$= (At + B)e^{rt}$