Oppgaveark 8

Oppgave 1

Regn ut vektorene $3\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ og $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ når

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Skisser også vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ i samme koordinatsystem.

Oppgave 2

Avgjør i hvert tilfelle om $\mathbf{a}$ er en linærkombinasjon av vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

a) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 3

Avgjør i hvert tilfelle om vektorene er lineært avhengige eller uavhengige.

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 4

Bestem de verdiene av h slik at vektorene er lineært uavhengige.

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$

Oppgave 5

Skisser i hvert tilfelle vektorene i et koordinatsystem, og avgjør om vektorene er lineært avhengige eller uavhengige.

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 6

Avgjør hvilke av følgende påstander som er sanne og hvilke som er gale. Begrunn svarene.

a) Hvis kolonnene i en matrise A er lineært uavhengige, så er A inverterbar.

b) Hvis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{a}_1$ en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

c) Gå ut ifra at $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige, og anta at $\mathbf{a}_1$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ lineært avhengige.

d) Gå ut ifra at $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er vektorer i $\mathbb{R}^4$, og at ikke $\mathbf{a}_1$ kan skrives som $c \cdot \mathbf{a}_2$ for noe tall c. Da er $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ lineært uavhenige.

Oppgave 7

Gå ut ifra at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ og $\mathbf{a}_4$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Vis at da er også $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ lineært uavhengige.

Oppgave 8

Skriv det lineære likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$$

som en matriselikning og som en vektorlikning.