Oppgaveark 3
ELE 3719 Matematikk Valgfag

Handelshøyskolen BI

Oppgaver

1. Oppgaver fra [Ross] Kapittel 2:
Oppgave 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40

2. Eksamen i ELE3719 16/06/2011, Spørsmål 5
La X være antall mål til hjemmelaget og Y være antall mål til bortelaget i løpet av en fotballkamp. Vi antar at X og Y er uavhengige stokastiske variable, at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_X = 2$, og at Y er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Y = 1$.

a) Finn $P(X = x, Y = y)$, og regn ut sannsynligheten for hvert av resultatene 0-0, 1-0 og 2-1.
b) Regn ut sannsynligheten $P(X = Y, X \leq 4)$. Gi en tolkning av denne sannsynligheten.
c) Regn ut den betingede sannsynligheten $P(X = Y | X \leq 4)$.
d) Finn sannsynligheten $P(X + Y \geq 2)$. Du vil tilby et veddemål der spilleren vinner d ganger innsatsen hvis det blir minst 2 mål, og taper innsatsen om det blir færre enn 2 mål. Hvor stor bør d være om veddemålet skal lønne seg for deg?

Løsninger

1 Løsninger fra [Ross] Kapittel 2:
Løsninger til [R] finnes i It's Learning.

2 Eksamen i ELE3719 16/06/2011, Spørsmål 5

a) Vi har at $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ siden X og Y er uavhengige, så

$$P(X = x, Y = y) = e^{-2}\,\frac{2^x}{x!} \cdot e^{-1}\,\frac{1^y}{y!} = \mathbf{e^{-3}}\,\frac{\mathbf{2^x}}{\mathbf{x!y!}}$$

Innsetting gir $P(0-0) = e^{-3} \simeq \mathbf{0.0498}$, $P(1-0) = 2e^{-3} \simeq \mathbf{0.0996}$, $P(2-1) = 2e^{-3} \simeq \mathbf{0.0996}$.

b) Vi har at $P(X = Y, X \leq 4) = P(0-0) + \cdots + P(4-4)$, så

$$P(X = Y, X \leq 4) = e^{-3}(1 + 2 + 1 + 2/9 + 1/36) = 4.25e^{-3} \simeq \mathbf{0.2116}$$

Dette er sannsynligheten for et uavgjort resultat med maksimalt fire mål til hjemmelaget.

c) Vi har $P(X = Y | X \leq 4) = P(X = Y, X \leq 4)/P(X \leq 4)$. Siden

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 4) = e^{-2}(1 + 2 + 2 + 4/3 + 2/3) = 7e^{-2}$$

så får vi

$$P(X=Y|X \leq 4) = \frac{4.25e^{-3}}{7e^{-2}} \simeq \mathbf{0.2234}$$

d) Vi har $P(X+Y \geq 2) = 1 - P(X+Y < 2)$ og

$$P(X+Y < 2) = P(0-0) + P(1-0) + P(0-1) = 4e^{-3}$$

så $P(X+Y \geq 2) = 1 - 4e^{-3} \simeq \mathbf{0.8009}$. La Z være netto utbetaling i veddemålet. Da har vi

$$Z = \begin{cases} dI - I & X+Y \geq 2 \\ -I & X+Y < 2 \end{cases}$$

der I er innsatsen. Setter vi $p = P(X+Y \geq 2) \simeq 0.8009$, finner vi at forventet netto utbetaling blir

$$E[Z] = (dI - I)p + (-I)(1-p) = dIp - I = I(dp-1)$$

Veddemålet gir forventet netto innbetaling om $E[Z] < 0$, dvs $dp - 1 < 0$ eller $d < 1/p \simeq 1.2487$. Altså lønner det seg å tilby veddemålet om $\mathbf{d < 1.2487}$.