Oppgaveark 6
ELE 3719 Matematikk Valgfag

Handelshøyskolen BI

Oppgaver

1. Regn ut $A+B$ og $3A+2B$ når

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2. Finn $-2A$ og $B-2A$ når

$$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -1\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

3. Løs matriselikningen $2A+3X=I$ for X når

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

4. Regn ut vektorene $3\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ og $3\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ når

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$$

Skisser også vektorene $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ og $3\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ i samme koordinatsystem.

5. Avgjør i hvert tilfelle om $\mathbf{a}$ er en linærkombinasjon av vektorene $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

a) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ -5\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

6. Avgjør i hvert tilfelle om vektorene er lineært avhengige eller uavhengige.

a) $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-5\\ -5\\ 5\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Bestem de verdiene av h slik at vektorene er lineært uavhengige.

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$

8. Skisser i hvert tilfelle vektorene i et koordinatsystem, og avgjør om vektorene er lineært avhengige eller uavhengige.

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Avgjør hvilke av følgende påstander som er sanne og hvilke som er gale. Begrunn svarene.

a) Hvis kolonnene i en matrise A er lineært uavhengige, så er A inverterbar.
b) Hvis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{a}_1$ en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.
c) Gå ut ifra at $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige, og anta at $\mathbf{a}_1$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ lineært avhengige.
d) Gå ut ifra at $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er vektorer i $\mathbb{R}^4$, og at ikke $\mathbf{a}_1$ kan skrives som $c \cdot \mathbf{a}_2$ for noe tall c. Da er $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ lineært uavhenige.

10. Gå ut ifra at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ og $\mathbf{a}_4$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Vis at da er også $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ lineært uavhengige.

11. Skriv det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

som en matriselikning og som en vektorlikning.

12. Regn ut uttrykkene AB, BA, BC, CB dersom de er definert når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Beregn AB og BA, hvis de eksisterer, når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Beregn A^2 og A^3 når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

15. Dersom A er en 3×5-matrise og produktet AB er en 3×7-matrise, hva er da størrelsen til matrisen B?

16. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling langs i) første rad ii) andre kolonne:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

17. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling langs i) første rad ii) andre kolonne:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

18. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

19. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

20. Regn ut $|A^2|$ når

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

21. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

22. Vi betrakter matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut A^2.
b) For en bestemt verdi av x er $A^2 = A$. Finn denne verdien.
c) Vis at A ikke er invertible når $A^2 = A$.

23. Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

24. Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Vi antar at A og B er invertible $n \times n$-matriser og at $r \neq 0$. Vis at

a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
b) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$

26. Regn ut $B^T\left((AB)^{-1}(3A)\right)^T$ når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 61 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 12 & 213 & -2 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Løsning : Oppgaveark 6

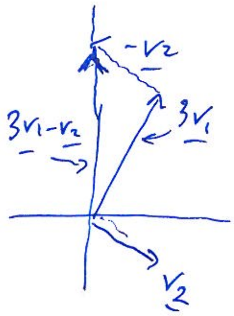
BI

1) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 19 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

2) $-2A = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B - 2A = \begin{pmatrix} -15 & 4 & 3 \\ 7 & -13 & -4 \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $3\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad -\underline{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 3\underline{v_1} - \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$



5) a) Ja: $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$

b) Ja: $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$

c) Nei

6) a) Lin. uavh

b) Lin. avh. $\quad \underline{a_2} = -5\underline{a_1}$

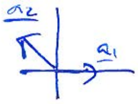
c) — " — $\quad \underline{a_2} = 0 \cdot \underline{a_1}$

d) Lin. uavh

7) a) $h \neq -7$

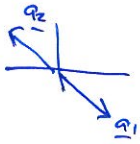
b) $h \neq -3$

8) a)



Lin. uavh.

b)



Lin. avh.

9) a) Sann hvis A kvadratisk

b) Usann

c) Sann $\quad \underline{a_1} = r\underline{a_2} + s\underline{a_3} \Rightarrow \underline{a_1} - r\underline{a_2} - s\underline{a_3} = \underline{0}$

d) Usann $\quad$ Eks: $\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

BI

10.) Anta $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_4\}$ lin. uavh. Se på $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ og likningen

$$c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 = \underline{0}$$

Hvis c_1, c_2, c_3 er løsninger, så er $(c_1, c_2, c_3, 0)$ løsn. s.a. $c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + c_3\underline{a}_3 + 0 \cdot \underline{a}_4 = \underline{0}$.

Siden $\{\underline{a}_1, \dots \underline{a}_4\}$ lin. uavh. så har vi kun triviell løsn, så

$$(c_1, c_2, c_3, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \underline{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$$

Dvs at $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ er lin. uavh.

11) Matriseform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorform:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12) AB ikke defn.

$$BA = \begin{pmatrix} 21 & -2 & 11 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

13) AB ikke defn.

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

14) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

15) $\left.\begin{matrix} \underset{3\times 5}{A} & B & \rightarrow & \underset{3\times 7}{AB} \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ B er 5×7

16) i) $3 \cdot (-13) - 0 \cdot * + 4 \cdot 10 = \underline{1}$

ii) $-0 \cdot * + 3 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) = \underline{1}$

17) i) $2 \cdot (-9) + 4(-5) + 3 \cdot 11 = \underline{-5}$

ii) $4 \cdot (-5) + 1 \cdot (-5) - 4 \cdot (-5) = \underline{-5}$

18) $\underline{12}$

19) $\underline{6}$

fra oppg 19

20) $|A^2| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = 6^2 = \underline{36}$

21) $5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \underline{65}$

22) a) $A^2 = \begin{pmatrix} -x & 5x+8 & 4x+4 \\ -1 & 1-x & 4 \\ 1 & x & -3 \end{pmatrix}$

b) $\underline{x=-2}$

c) A invertibel $\Rightarrow$ $A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow A = I$. Dette er ikke tilfelle ($A \neq I$) så A er <u>ikke</u> invertibel.

23) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

24) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

25) a) Med $C = B^{-1}A^{-1}$ har vi $\begin{cases} (AB)\cdot C = I \\ C\cdot(AB) = I \end{cases}$ så $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$.

b) Med $C = \frac{1}{r}A^{-1}$ har vi $\begin{cases} (rA)\cdot C = I \\ C\cdot(rA) = I \end{cases}$ så $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.

26) $3I = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$