FORELESNING 11

ELE 3719 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

MAR 17/2015

Plan:

1. Differensiallikninger
2. Separable diff.likninger

1. Differensiallikninger

En differensiallikning i $y = y(t)$ er en likning som inneholder $y' = y'(t)$ og evt. høyere ordens deriverte.

Eks:

$$y' = y^2 \cdot t \iff y'(t) = y(t)^2 \cdot t$$

$$y' = 2t \qquad\qquad y'(t) = 2t$$

Vi kan løse $y' = 2t$:

$$y = \int 2t\,dt = t^2 + C$$

$$\boxed{y(t) = t^2 + C}$$

generelle løsningen av diff. likningen

En første ordens diff.likning er en diff.likn. som inneholder y' men ikke høyere ordens deriverte. De kan skrives:

$$\boxed{y' = F(y,t)}$$

Eks:

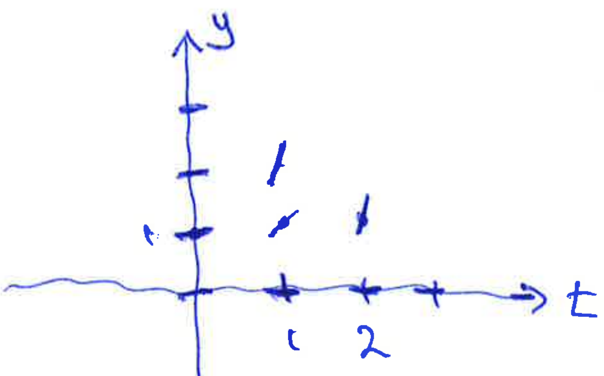
$y' = y^2 \cdot t$

$y' = 2t$

$y' = 3y$

Eks: $y' = yt$

$F(y,t) = yt$



$F(1,2) = 2$

$F(1,1) = 1$

(fasediagram)

En første ordens diff.likning beskriver stigningstallet $y' = y'(t)$ i hvert punkt, dvs. endring i $y(t)$.

Eks:

$D = \alpha - \beta P$

$S = a + bp$

$p' = \lambda(D - S) \leftarrow$ Diff.likning: modellerer endring i $p = p(t)$

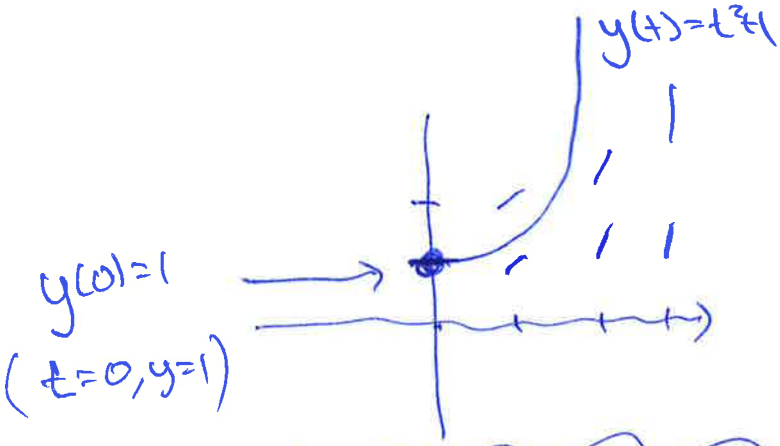
$$\boxed{p' = \lambda \cdot (\alpha - \beta p - a - bp)}$$

For å finne en <u>konkret</u>, entydig gitt løsn. av en første ordens diff.likning, trenger vi en <u>initialbetingelse</u>, i tillegg til diff.likn.

<u>Eks:</u> $y' = 2t$, $y(0) = 1$
initialbetingelse

$$y(t) = t^2 + C$$
(generell løsn)

$$y(0) = 0^2 + C = 1$$
$$C = 1$$
$$\underline{\underline{y(t) = t^2 + 1}}$$
(partikulær løsning)



<u>Fakta:</u>
En første ordens diff.likn. har alltid en generell løsn. som avhenger av <u>én</u> ubestemt konstant.

Eks: $y' = te^t$, $\boxed{y(0)=1}$

Finner først generell løsn:

$$y' = te^t$$

$$y = \int te^t \, dt$$

$$= \int v \cdot u' \, dt$$

$$= e^t \cdot t - \int e^t \cdot 1 \, dt$$

$$= t \cdot e^t - e^t + C$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u' = e^t & v = t \\ u = e^t & v' = 1 \end{array}}$$

__delvis integrasjon__

$$\int u' \cdot v \, dt = uv - \int uv' \, dt$$

__Generell løsn:__

$$\boxed{y = te^t - e^t + C}$$

$\underline{y(0)=1}$:

$(t=0, y=1)$

$$1 = 0 \cdot e^0 - e^0 + C$$

$$1 = 0 - 1 + C$$

$$\underline{C = 2}$$

__Partikulær løsn:__

$$\boxed{y = te^t - e^t + 2}$$

__Sjekk:__

$$y' = \cancel{1 \cdot e^t} + t \cdot e^t \cancel{- e^t} + 0$$

$$= te^t$$

Repetisjon av integrasjon:

i) $\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$

ii) $\int \frac{1}{t} \, dt = \ln|t| + C$

iii) $\int e^t \, dt = e^t + C$

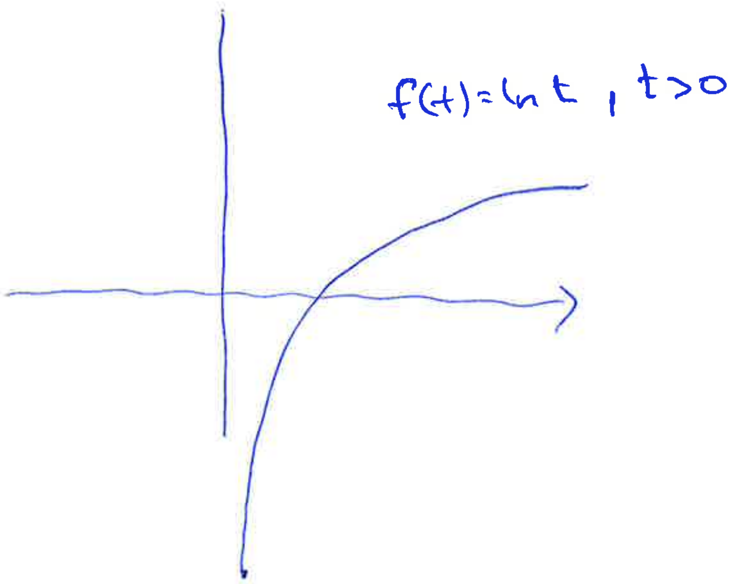
Delvis integrasjon:

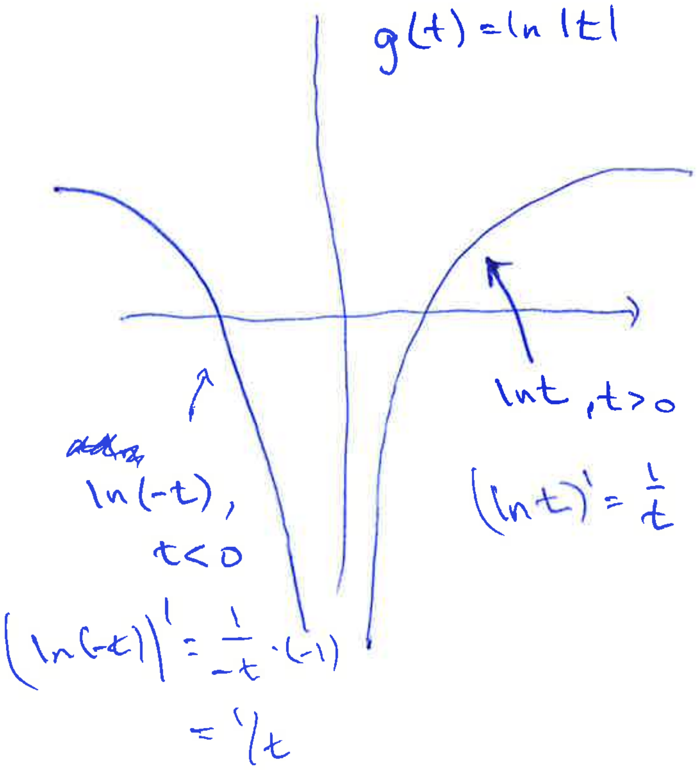
$$\int u'v \, dt = uv - \int uv' \, dt$$

Substitusjon:

$$\int f(u) \cdot u' \, dt = \int f(u) \, du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u(t) \\ du &= u' \cdot dt \end{aligned}}$$





Eks: Substitusjon

$$\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{u}\,dt = \int \frac{\cancel{t}}{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t^2+1 \\ du &= 2t \cdot dt \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\left(\ln|u| + C\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+1| + \frac{1}{2}C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C'}}$$

② # Separable differensiallikninger

Første ordens diff. likning: $y' = F(y,t)$

Eks: $y' = e^{t^2}$ ikke mulig å løse u/regning.

Første type vi har sett på:

$$y' = F(t) \Longrightarrow y = \int F(t)\,dt$$

En differensiallikning kalles separabel hvis den kan skrives på formen

$$\boxed{y' = f(y) \cdot g(t)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{f(y)} \cdot y' = g(t)$$

Diff. likn. på separert form

Eks:

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(t) = 1 \cdot F(t) \\ y' &= F(y) = F(y) \cdot 1 \\ y' &= y^2 \cdot t \quad \begin{cases} f(y) = y^2 \\ g(t) = t \end{cases} \end{aligned}\right\}$$

Eks. på separable diff. likn.

$y' = y + t^2 \leftarrow$ ikke separabel.

Eks: $y' = y^2 \cdot t \quad | : y^2$

Sep. form $\rightarrow \frac{1}{y^2} \cdot y' = t \quad | \int \ldots dt$

$$\int \frac{1}{y^2} y' \, dt = \underbrace{\int t \, dt}_{\text{integral i } t}$$

$$\| $$

$$\underbrace{\int \frac{1}{y^2} \, dy}_{\text{integral i } y}$$

Hvorfor blir

$$\int \frac{1}{y^2} y' dt = \int \frac{1}{y^2} dy \, ?$$

Substitusjon $y = y(t)$

$dy = y' dt$

y^{-2}

$$\int \frac{1}{y^2} \, dy = \int t \, dt$$

$$\frac{y^{-2+1}}{-2+1} + C_1 = \frac{1}{2} t^2 + C_2$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} + C_1 = \frac{1}{2} t^2 + C_2$$

$$-\frac{1}{y} + C_1 = \frac{1}{2} t^2 + C_2$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} t^2 + (C_2 - C_1) = \frac{1}{2} t^2 + K$$

(implisitt løsning)

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}t^2 + K$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}t^2 - K \quad | \cdot y$$

$$1 = \left(-\frac{1}{2}t^2 - K\right)y$$

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2}t^2 - K}$$ <u>eksplisitt løsning</u>

$$\underline{\underline{y = \frac{-2}{t^2 + 2K}}}$$

<u>Generell metode</u> :

(separable diff. likn.)

$$y' = f(y) \cdot g(t)$$

$$\frac{1}{f(y)} y' = g(t)$$

$$\int \frac{1}{f(y)} y' \, dt = \int g(t) \, dt$$

$$\boxed{\int \frac{1}{f(y)} \, dy = \int g(t) \, dt}$$

Vi løser de to integralene, og får en <u>implisitt løsn.</u> $\longrightarrow$ uttrykk i y = uttrykk i t

Løs likningen for y og får <u>eksplisitt løsning</u> $\longrightarrow$ y = uttrykk i t

= generelle løsn. av diff. likn.

Eks: $y' = a \cdot y$ (a konstant)

$$\underset{f(y)}{y'} = y \cdot \underset{g(t)}{a}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = a$$

$$\int \frac{1}{y} y' \, dt = \boxed{\int \frac{1}{y} \, dy = \int a \, dt}$$

Implisitt løsn: $\longrightarrow$ $\ln|y| = at + C$

$$e^{\ln|y|} = e^{at+C}$$

$$|y| = e^{at+C} = e^{at} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{at} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{at}$$

Eksplisitt løsn.= Generell løsn. $\longrightarrow$ $\underline{y = K e^{at}}$

Eks: $y' = 0.02y$, $\underline{y(0) = 500}$

$\Downarrow$

$$y = K \cdot e^{0.02t}$$

$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ y = 500 \end{array}\right\}$ $500 = K \cdot e^{0}$, $K = 500$

$$y = 500 e^{0.02t}$$

Eks: $y' = \frac{t}{y}$, $y(0) = 1$

$$y' = \frac{1}{y} \cdot t$$

$$yy' = t$$

$$\int y\,dy = \int t\,dt$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + C \quad | \cdot 2$$

$$y^2 = t^2 + 2C$$

$$y = \pm\sqrt{t^2+2C}$$

$\underline{y(0)=1}$: $1 = \pm\sqrt{0^2+2C}$, $C = 1/2$

$$\underline{\underline{y = \sqrt{t^2+1}}}$$

Eks: $y' = yt + t + y + 1$

$= (y+1)(t+1)$ ← separabel.

$$\frac{1}{y+1}\,y' = t+1$$

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy = \int t+1\,dt$$

$$\ln|y+1| = \frac{1}{2}t^2 + t + C$$

$$|y+1| = e^{\frac{1}{2}t^2+t+C}$$

$$y+1 = (\pm e^C) \cdot e^{\frac{1}{2}t^2+t}$$

$$\underline{\underline{y = K \cdot e^{\frac{1}{2}t^2+t} - 1}}$$

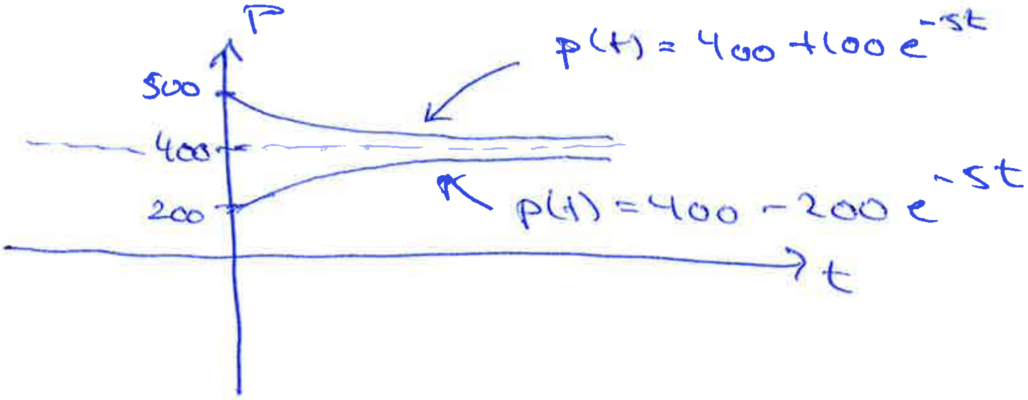
Eks:

$$D = \alpha - \beta p = 5000 - 4p$$
$$S = a + bp = 1000 + 6p$$
$$p' = \lambda \cdot (D - S) = 0.5(D - S)$$

$$p' = 0.5(5000 - 4p - 1000 - 6p)$$
$$= 0.5(4000 - 10p)$$
$$p' = 2000 - 5p$$

Diff.likn: $p'(t) = 2000 - 5p(t)$

$$p' = 2000 - 5p$$
$$p' = (400 - p) \cdot 5$$
$$\frac{1}{400-p} p' = 5$$
$$\int \frac{1}{400-p}\,dp = \int 5\,dt$$
$$- \ln|400-p| = 5t + C$$
$$\ln|400-p| = -5t - C$$
$$|400-p| = e^{-5t} \cdot e^{-C}$$
$$400 - p = (\pm e^{-C}) e^{-5t} = K \cdot e^{-5t}$$
$$400 = p + Ke^{-5t}$$
$$\boxed{p = 400 - Ke^{-5t}}$$ generell løsn.



$$p(t) = 400 - K e^{-5t}$$

$$p(0) = 400 - K \cdot e^{0} = 400 - K$$

<u>Eks:</u> $p(0) = 500$: $500 = 400 - K$

$\underline{K = -100}$

$p(0) = 200$: $200 = 400 - K$

$\underline{K = 200}$

$t \to \infty \implies p(t) \to 400$ (likevektspris)

(uansett hva $p(0)$ er)