ELE 3719   7. mars 2015

Differensiallikninger

Separable :

$$\boxed{y'(t) = f(y)\cdot g(t)}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\cdot g(t)$$

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(t)\,dt$$

<u>eks.</u>

$$y' = y^2 \cdot \ln t$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cdot \ln t$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \ln t\,dt$$

$$-\frac{1}{y} = t\ln t - t + c$$

$$y = \frac{1}{t - t\ln t - c}$$

$$\int \ln t\,dt = \int \underset{u'}{1}\cdot \underset{v}{\ln t}\,dt$$

$$= \underset{u\cdot v}{t\ln t} - \int t\,\frac{1}{t}\,dt$$

$$= t\ln t - t + c$$

1. ordens lineære diff. likn:

$$\boxed{y' + a(t)\cdot y = b(t)}$$

a, b konstanter:

$$y' + ay = b$$

<u>eks.</u> $y' + 4y = 2$ integrerende faktor $e^{at} = e^{4t}$

$$y'\cdot e^{4t} + 4ye^{4t} = 2e^{4t}$$

$$(y\cdot e^{4t})' = 2e^{4t}$$

$$y\cdot e^{4t} = \int 2e^{4t}\,dt$$

$$y\cdot e^{4t} = \frac{1}{2}e^{4t} + c \quad \Big|\cdot e^{-4t}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2} + ce^{-4t}}}$$

$$y' + ay = b$$

$$y = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

$$\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y = \frac{b}{a} \text{ hvis } a > 0$$

Tilbud: $S = 800 + 4P$

Etterspørsel: $D = 2000 - 2P$

$P' = 0{,}5\,(D - S)$

$$P' = 0{,}5(1200 - 6P)$$
$$P' = 600 - 3P$$
$$\boxed{P' + 3P = 600}$$

Løsning:

Homogen: $P' + 3P = 0$

Kar. likn. $r + 3 = 0$

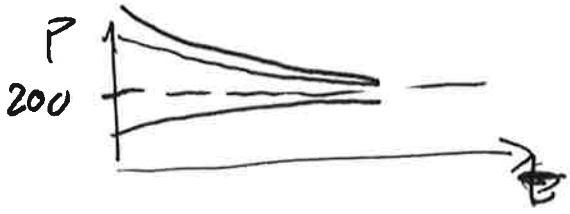
$r = -3$

$P_h = Ce^{rt} = Ce^{-3t}$

Gjetter at $P = A$ er en løsning

$$0 + 3A = 600$$
$$A = 200$$
$$P_p = 200$$

$$P = P_h + P_p$$
$$P = Ce^{-3t} + 200$$
$$\lim_{t\to\infty} P = \lim_{t\to\infty}\left(Ce^{-3t} + 200\right) = 200$$



a, konstant , b(t) funksjon

$$\boxed{y' + ay = b(t)}$$

<u>Eks.</u> $y' - y = t$

Integrerende faktor $e^{at} = e^{-t}$

$$y' \cdot e^{-t} - y \cdot e^{-t} = t \cdot e^{-t}$$

$$(y \cdot e^{-t})' = t \cdot e^{-t}$$

$$y \cdot e^{-t} = \int \underset{u}{t} \cdot \underset{v'}{e^{-t}}\, dt$$

$$y \cdot e^{-t} = t \cdot (-e^{-t}) - \int (-e^{-t})\, dt$$

$$y \cdot e^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + C \quad | \cdot e^{t}$$

$$\underline{\underline{y = -t - 1 + C \cdot e^{t}}}$$

a(t), b(t) begge funksjoner:

Integrerende faktor: $e^{\int a(t)\,dt}$

<u>Eks.</u> $y' - 2t \cdot y = t$ $\qquad a(t) = -2t$

$$y' \cdot e^{-t^2} - 2t \cdot y e^{-t^2} = t \cdot e^{-t^2} \qquad e^{\int -2t\,dt} = e^{-t^2}$$

$$(y \cdot e^{-t^2})' = t \cdot e^{-t^2}$$

$$y \cdot e^{-t^2} = \int t e^{-t^2} dt$$

$$u = -t^2$$

$$\frac{du}{dt} = -2t$$

$$du = -2t\,dt$$

$$y \cdot e^{u} = \int -\frac{1}{2} e^{u} du$$

$$= \dots =$$

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} Ce^{-u}$$

$$y = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} Ce^{t^2}}}$$

2. ordens differensialikninger
- lineære med konstante koeffisienter.

$$\boxed{y'' + ay' + by = f(t)}$$

Vi bruker karakteristisk likning
og addisjonsprinsipp (superposition)

<u>Eks</u>

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 6} \quad *$$

$y = y_h + y_p$

y_h: Løser homogen likning

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Vi løser den karakteristiske likningen:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

abc

$$r_1 = 1, \; r_2 = 2$$

Når den karakteristiske likningen har to forskjellige røtter er den homogene løsningen:

$$y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

i eks.: $y_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

y_p : Gjetter $y = A$ er en løsning i *

$$0 - 3 \cdot 0 + 2A = 6$$
$$A = 3$$
$$y_p = 3$$

$$y = y_h + y_p$$
$$\underline{\underline{y = C_1 \cdot e^t + C_2 e^{2t} + 3}}$$

Den homogene likning (gen.):

$$** \quad y'' + ay' + by = 0$$

Karakteristisk likning:

$$* \quad r^2 + ar + b = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

<u>Tre tilfeller</u>

1) $a^2 - 4b > 0 \Rightarrow$ * har to reelle løsninger r_1 og r_2
og ** har løsning
$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

2) $a^2 - 4b = 0 \Rightarrow$ * har en løsning, r
og ** har løsning
$$y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$$

3) $a^2 - 4b < 0$ * har løsningene:
$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \alpha \pm \beta \sqrt{-1} \qquad (\alpha \pm \beta i)$$
** har løsning
$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \cdot \sin(\beta t))$$

eks. 2) $\boxed{y'' - 4y' + 4y = 1}$

Homogen likn: $y'' - 4y' + 4y = 0$

Kar. likn. $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

y_h: $y_h = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$

$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

y_p: Anta $y = A$ løsning

$0 - 4 \cdot 0 + 4A = 1$

$A = \frac{1}{4}$

$y_p = \frac{1}{4}$

$y = y_h + y_p$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4}}}$$

Hva er feil her?

eks. $\boxed{y'' - 4y' + 4y = t}$

y_h: Samme homogene løsning: $y_h = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

y_p: Gjelter $y = At$ er en løsning $\Rightarrow y' = A, y'' = 0$

$0 - 4A + 4At = t$

$A(4t - 4) = t$

$4A(t-1) = t$

$A = \frac{t}{4(t-1)}$

$y = y_h + y_p$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{t}{4(t-1)}}}$$

Eks. 3)

$$\boxed{y'' - 4y' + 7y = 4}$$

Homogen likning: $y'' - 4y' + 7y = 0$

Kar. likning:

$$r^2 - 4r + 7 = 0$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

$$\alpha = 2, \ \beta = \sqrt{3}$$

y_h: $\quad y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$

$$y_h = e^{2t}(C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t))$$

y_p: Gjetter $y = A$ er en løsning

$$0 - 4 \cdot 0 + 7 \cdot A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{7}$$

$$y_p = \frac{4}{7}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\underline{\underline{y = e^{2t}(C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)) + \frac{4}{7}}}$$

øvelse 1

Finn den generelle løsningen til

$$\boxed{y'' - 5y' + 4y = 1}$$

og kontroller svaret.

løsning karakteristisk likning til homogen likn.:

y_h : $\quad r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 4$

$$y_h = c_1 e^{t} + c_2 e^{4t}$$

y_p : $\quad$ Anta $y = A$ er løsning $\Rightarrow 4A = 1$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4}$$

$$y = \underline{\underline{c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} + \frac{1}{4}}}$$

Kontroll:

$$y' = c_1 e^{t} + 4c_2 e^{4t}$$

$$y'' = c_1 e^{t} + 16 c_2 e^{4t}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 4y &= c_1 e^{t} + 16 c_2 e^{4t} \\ &\quad - 5c_1 e^{t} - 20 c_2 e^{4t} \\ &\quad + 4c_1 e^{t} + 4 c_2 e^{4t} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

stemmer!

øvelse 2

Finn den generelle og den partikulære løsningen til:

$$y'' + 4y' + 4y = 5 \quad \text{nai} \quad y(0) = \frac{1}{4} \text{ og } y(1) = \frac{5}{4}$$

Kar. likn: $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = -2$

y_h: $y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

y_p: Anta $y = A$ løsning

$$0 + 4 \cdot 0 + 4A = 5$$

$$A = \frac{5}{4}$$

$$y_p = \frac{5}{4}$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{5}{4}}}$$ Generelle løsningen.

$$y(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = C_1 + \frac{5}{4} \Rightarrow C_1 = -1$$

$$y = -e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{5}{4}$$

$$y(1) = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} = -e^{-2} + C_2 e^{-2} + \frac{5}{4} \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\underline{\underline{y = -e^{-2t} + t e^{-2t} + \frac{5}{4}}}$$ Partikulær løsning.

øvelse 3

løs: $y'' + 4y' + 5y = 10$

løsning: Kar. likn.: $r^2 + 4r + 5 = 0$
til homogen
likning

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

$$= -2 \pm i$$

$$\alpha = -2, \beta = 1$$

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

y_h: $y_h = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

y_p: $y = A$ løsning $5A = 10 \Rightarrow A = 2$

$$y_p = 2$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\underline{\underline{y = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2}}$$