FORELESNING 14

ELE 3719 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

APR 14, 2015

Plan:

1. Andre ordens lineære differensial-likninger: Repetisjon, systemer
2. Optimal kontrollteori (variasjonsregning)

Pensum:

[VAR]

---

1. Andre ordens diff.likninger

Eks:

$$y'' - 4y' = t$$

$$\int y'' - 4y' \, dt = \int t \, dt$$

$$y' - 4y = \frac{1}{2}t^2 + C_1 \quad \Big| \cdot e^{-4t}$$

Annen ordens diff.likn. har en generell løsn. som avh. av **to** ubestemte konstanter

$$(y \cdot e^{-4t})' = \frac{1}{2}t^2 e^{-4t} + C_1 e^{-4t}$$

$$y \cdot e^{-4t} = \int \frac{1}{2}t^2 e^{-4t} + C_1 e^{-4t} \, dt$$

delvis integrasjon

$$y = e^{4t} \cdot \int \frac{1}{2}t^2 e^{-4t} + C_1 e^{-4t} \, dt$$

$$= e^{4t} \cdot \left(\cdots - \frac{C_1}{4} e^{-4t} \right) + C_2$$

To ubestemte konstanter $\longrightarrow$ Vi trenger to initial-betingelser for å bestemme en partikulær løsn. av en annen ordens diff. likning

Eks:

$$y(a) = y_0 \qquad\qquad y(a) = y_0$$
$$y'(a) = y_0' \quad \text{eller} \quad y(b) = y_1$$

Lineære med konstante koeff:

$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad \begin{cases} a, b : \text{konst.} \\ f(t) : \text{uttrykk i } t \end{cases}$$

Eks: $y'' - 4y' - 12y = t$

Løsn: $y = y_h + y_p = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{12}t + \frac{1}{36}$

y_h:
$$\left.\begin{aligned} y'' - 4y' - 12y &= 0 \\ r^2 - 4r - 12 &= 0 \\ r &= \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \\ r_1 = 6, \quad & r_2 = -2 \end{aligned}\right\} \quad y_h = C_1 e^{6t} + C_2 \cdot e^{-2t}$$

y_p: $y'' - 4y' - 12y = t$

Vi tar utg.punkt i høyresiden $f(t) = t$ og gjetter en løsn.

$y = A \cdot t$

$0 - 4 \cdot A - 12 \cdot At = t$

$A \cdot (-4 - 12t) = t \quad \longleftarrow \quad y' = A \quad y'' = 0$

Altså: $(-12A)t + (-4A) = 1 \cdot t + 0$

$$-12A = 1$$
$$-4A = 0$$

$\leftarrow$ ingen løsn. for A $\Rightarrow$ ingen løsn. på formen $\underline{y = At}$

Prøver: (istedet)

$$\left.\begin{aligned} y &= At + B \\ y' &= A \\ y'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$y'' - 4y' - 12y = t$$
$$0 - 4A - 12(At+B) = t$$
$$(-12A)t + (-4A - 12B) = t$$

$$-12A = 1 \quad \Rightarrow A = -\frac{1}{12}$$
$$-4A - 12B = 0$$

$$-4 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) - 12B = 0$$
$$1/3 - 12B = 0$$
$$\underline{B = 1/36}$$

$$\Leftarrow$$

$$y_p = \underline{\underline{-\frac{1}{12}t + \frac{1}{36}}}$$

Hvordan sjekke y_p?

Se på $f(t)$, og regn ut $f'(t)$, $f''(t)$

Eks: $f(t) = t$, $f'(t) = 1$, $f''(t) = 0$ $\rightarrow$ Velg $\underline{At+B} = y$

Enkle tilfeller: $y'' - 4y' - 12y = 36$

$$y_p = -3$$

Eks: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Karakteristisk lokn. for diff.likn:

$r^2 - 3r + 2 = 0$

Løsning vha egenverdier:

$$\left.\begin{aligned} u &= y \\ v &= y' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u' &= v \\ v' - 3v + 2u &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -2u + 3v \end{aligned}$$

$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$\underline{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{u}' = A\underline{u}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Løsn: $\underline{u} = C_1 \cdot \underline{v_1} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot \underline{v_2} e^{\lambda_2 t}$

Egenverdier: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ← Karakteristisk likn. for A

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_1 = 1:}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 2:}$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$u = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} = y$$
$$v = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} = y'$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}}}$$

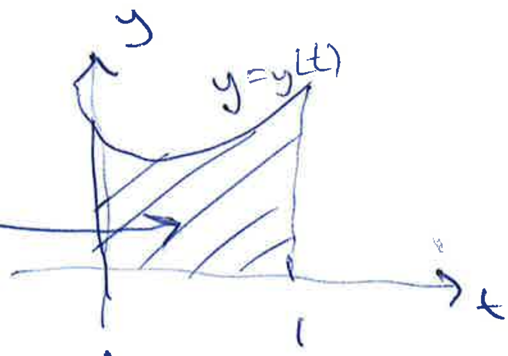
(2) Optimal kontroll teori

Optimal kontrollteori (variasjonsregning) = max/min-problem for funksjonaler

En funksjonal er en regel som tilordner en tallverdi til enhver funksjon $y = y(t)$ av en bestemt type.

Eks:

$$J(y) = \int_0^1 y(t)\,dt$$



"Definisjonsmengden" er kontinuerlige funksjoner $y = y(t)$ definert på $[0,1]$.

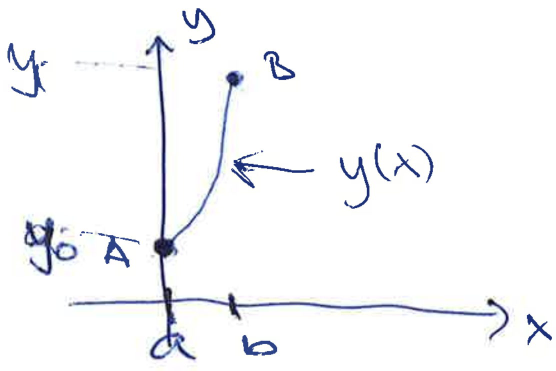
Tolkning: $J(y)$ er ~~et~~ arealet under grafen fra $t=0$ til $t=1$.

$y = t^2$ gir:

$$J(t^2) = \int_0^1 t^2\,dt = \left[t^3/3\right]_0^1 = \underline{1/3}$$

$$J(t) = \int_0^1 t\,dt = \left[t^2/2\right]_0^1 = \underline{1/2}$$

Eks:



$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx$$

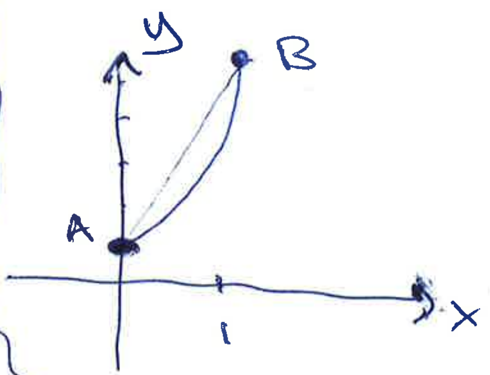
$\dot{y} = y'$

formel for lengden til kurven fra A til B

$$\min \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$$

Konkret eks:

$$\min \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad \text{når} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$



Variasjonsproblemet:

$$\max/\min \underbrace{\int_a^b F(t, y, y')\,dt}_{J(y)\ \text{funksjonal}} \quad \text{når} \quad \underbrace{\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}}_{\text{bibetingelser}}$$

(der F er gitt uttrykk og a, b, y_0, y_1 er gitte konstanter)

Nødvendig betingelse: Euler-likningen

Hvis $y = y(t)$ er et maks/min i variasjonsproblemet ovenfor, så oppfyller y Euler-likningen:

$$F'_y - \frac{d}{dt}\left(F'_{y'}\right) = 0$$

Eks: max $\int_0^1 (-y^2 - (y')^2)\,dt$ når $y(0) = 0$, $y(1) = e^2 - 1$

$$F = -y^2 - (y')^2 = -y^2 - \dot{y}^2$$

Euler: $F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{\dot{y}}) = 0$

$$\left.\begin{aligned} F'_y &= -2y \\ F'_{\dot{y}} &= -2\dot{y} = -2y' \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{partiell-derivert}$$

$$\frac{d}{dt}(F'_{\dot{y}}) = \frac{d}{dt}(-2\dot{y}) = -2\cdot\ddot{y} = -2y''$$

Euler: $-2y - (-2y'') = 0$

$$2y'' - 2y = 0$$

$$\underline{y'' - y = 0}$$

Løser diff. likn: $y'' - y = 0$

Kar. likn: $r^2 - 1 = 0$

$$r = \pm 1$$

$$y = \underline{C_1 e^t + C_2 e^{-t}} \quad \leftarrow \text{generell løsn.}$$

Finner c_1, c_2 vha initial betingelsene:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= e^2-1 \end{aligned}\right\} \qquad y = c_1 \cdot e^t + c_2 e^{-t}$$

$\underline{y(0)=0}$:

$$0 = c_1 e^0 + c_2 \cdot e^0$$

$$0 = c_1 + c_2 \Rightarrow \underline{c_2 = -c_1}$$

$\underline{y(1)=e^2-1}$:

$$e^2-1 = c_1 \cdot e^1 - c_1 e^{-1}$$

$$e^2-1 = c_1 \cdot (e - e^{-1})$$

$$c_1 = \frac{e^2-1}{e-e^{-1}} \Bigg| \begin{matrix} \cdot e \\ \cdot e \end{matrix} = \frac{e\cancel{(e^2-1)}}{\cancel{e^2-1}}$$

$$= e$$

$$\Downarrow$$

Kandidat for max/min:

$$y = e \cdot e^t - e \cdot e^{-t}$$

$$= e^{t+1} - e^{1-t}$$

$$\boxed{y^* = e^{1+t} - e^{1-t}}$$

enten gir y^* maks, eller så har problemet ikke noe $\underline{\text{maks}}$.

Eks: $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

$$f'_x = 2x + 3y = 0$$
$$f'_y = 3x + 2y = 0 \quad \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (x^*, y^*) = (0,0)$$

$\uparrow$ $\det \neq 0$

Hvis $f(x,y)$ har maks/min, så må det være et stasjonært pkt (dvs $f'_x = f'_y = 0$)

$$A = f''_{xx}(0,0) = 2$$
$$B = f''_{xy}(0,0) = 3$$
$$C = f''_{yy}(0,0) = 2$$

$$\boxed{AC - B^2 > 0}$$
$$4 - 9 = -5$$
$$\Downarrow$$

Sadelpkt.

Konkl: Ingen maks eller min.

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \qquad \text{Hessian til } f$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Andreordens betingelsen for variasjonsproblemet

Problem: $\max/\min \int_a^b F(t,y,y')\,dt$ når $\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$

Vi ser på den Hessiske matrise $H(F)$ til F når vi ser på $F = F(y,y')$ er en funksjon i y og y':

$$H(F) = \begin{pmatrix} F''_{yy} & F''_{y,y'} \\ F''_{y,y'} & F''_{y',y'} \end{pmatrix}$$

1 Eks: $F = -y^2 - (y')^2$

$F'_y = -2y$ $\quad F''_{yy} = -2$ $\quad F''_{y,y'} = 0$

$F'_{y'} = -2y'$ $\quad F''_{y,y'} = 0$ $\quad F''_{y',y'} = -2$

$$H(F) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Definisjon:

F er en konveks funksjon i (y,y') hvis $H(F)$ er positiv semidefinitt og konkav hvis $H(F)$ er negativ semidefinitt

Konveks $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} F''_{yy} \cdot F''_{y'y'} - (F''_{yy'})^2 \geq 0 \\ F''_{yy},\ F''_{y'y'} \geq 0 \end{cases}$

for alle (t, y, y')

Konkav $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} F''_{yy} \cdot F''_{y'y'} - (F''_{yy'})^2 \geq 0 \\ F''_{yy},\ F''_{y'y'} \leq 0 \end{cases}$

for alle (t, y, y')

Andreordens betingelsen:

Anta at y^* oppfyller Euler-likningen og initial betingelsene. Da har vi:

F konveks i (y, y') $\Longrightarrow$ y^* minimum

F konkav i (y, y') $\Longrightarrow$ y^* maksimum

1 Eks.

$y^* = e^{1+t} - e^{1-t}$

løser Euler + initial bet.

$H(F) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(-2) \cdot (-2) - 0^2 = 4 \geq 0$ ✓

$-2, -2 \leq 0$ ✓ konkav

$\Downarrow$

$y^* = e^{1+t} - e^{1-t}$ er løsn. av maks-problem