FORELESNING 15 — ELE3719

EIVIND ERIKSEN — APR 21, 2015 — MATEMATIKK

Plan:

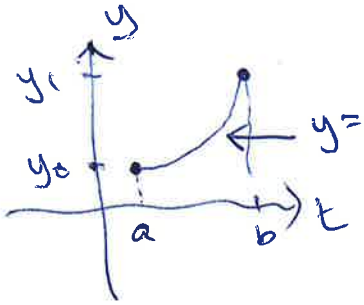
1. Variasjonsregning: Eksempler
2. Optimal kontrollteori: Alternativ formulering

Ekstra forelesning: $\boxed{\text{5. juni fra kl 14–17}}$

Prøve-eksamen: Legges ut på It's Learning i løpet av den nærmeste tida.

1 Variasjonsregning:

max/min $J(y) = \int_a^b F(t,y,y')\,dt$ når $\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases}$



$y = y(t) \rightsquigarrow J(y)$

i) Euler-likningen: $F'_y - \frac{d}{dt} F'_{y'} = 0$ (diff. likning av orden 2)

ii) Løsning av Euler + randbetingelsene: y^* kandidat for max/min

iii) F konveks/konkav i (y, y') $\Longrightarrow$ y^* gir min / max
(konveks) (konkav)

Eks 1: max $\int_0^1 -y^2-(y')^2\,dt$ når $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=e^2-1 \end{cases}$

$$F = -y^2-(y')^2 = -y^2-\dot{y}^2$$

Euler: $F'_y - \frac{d}{dt}F'_{y'} = 0$

$$F'_y = -2y$$
$$F'_{y'} = -2y' \qquad \frac{d}{dt}(-2y') = -2\cdot y''$$

Euler: $-2y-(-2y'')=0$
$$-2y+2y''=0$$
$$y''-y=0$$

homogen, lineær
$$y''+ay'+by=f(t)$$
$a=0$, $b=-1$ $f(t)=0$

Kar. likn: $r^2+0\cdot r-1=0$
$$r^2-1=0$$
$$r=\pm 1$$

$$y = C_1\cdot e^t + C_2\cdot e^{-t}$$ generell løsn. av Euler-likn.

Bibetingelser:

$y(0)=0$: $0 = C_1\cdot e^0 + C_2\cdot e^{-0}$
$$C_1+C_2=0 \Rightarrow C_2=-C_1$$

$y(1)=e^2-1$:
$$e^2-1 = C_1\cdot e^1 - C_1\cdot e^{-1}$$
$$e^2-1 = C_1\cdot(e-e^{-1}) \Rightarrow C_1 = \frac{e^2-1\cdot e}{e-e^{-1}\cdot e} = \frac{(e^2-1)e}{e^2-1} = e$$

$$y^* = e\cdot e^t - e\cdot e^{-t}$$

Er $y^* = e \cdot e^t - e \cdot e^{-t}$

maksimumspunkt?

Bruker konveks/konkav-egenskaper:

$$F = -y^2 - (y')^2$$

$F'_y = -2y$ $\quad F''_{yy} = -2$ $\quad F''_{y,y'} = 0$

$F'_{y'} = -2y'$ $\quad F''_{y',y} = 0$ $\quad F''_{y',y'} = -2$

$$H(F) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

F konkav i (y, y'): $\Leftrightarrow$ $H(F)$ er negativ semidefn.

$\det H(F) = 4 \geq 0$ $\qquad F''_{yy} \cdot F''_{y',y'} - (F''_{y,y'})^2 \geq 0$

$\operatorname{tr} H(F) = -4 \leq 0$ $\qquad F''_{yy}, F''_{y',y'} \leq 0$

Hvis $F''_{yy} \cdot F''_{y',y'} - (F''_{y,y'})^2 \geq 0$

så er $F''_{yy} \cdot F''_{y',y'} \geq (F''_{y,y'})^2 \geq 0$

$\Downarrow$

$y^* = e \cdot e^t - e \cdot e^{-t}$ er et maksimum(spunkt)

$J(y^*) = \int_0^1 -(y^*)^2 - ((y^*)')^2 \, dt = \ldots$ maksimumsverdi

Eks: $\min \int_0^1 ty' + (y')^2 \, dt$ når $\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=0 \end{cases}$

$F = ty' + (y')^2$:

i) $F'_y = 0$

$F'_{y'} = t + 2y'$ $\qquad \frac{d}{dt}(t+2y') = 1 + 2y''$

Euler: $0 - (1+2y'') = 0$

$\boxed{y'' + ay' + by = f(t)}$

$1 + 2y'' = 0$

$2y'' = -1$

$y'' = -1/2$

$y = y_h + y_p = \underline{C_1 + C_2 t - \frac{1}{4}t^2}$

$\underline{y_h}$: $y'' = 0$

$r^2 = 0$

$\underline{r = 0} \longrightarrow y_h = C_1 \cdot e^{0t} + C_2 t \cdot e^{0t}$

$= \underline{C_1 + C_2 t}$

$\underline{y_p}$: $y'' = -1/2$ $\qquad y = A$: $0 = -1/2 \leftarrow$ går ikke

multipliserer med t

$y = At$: $y'' = 0$

$\boxed{y = At^2}$: $y' = 2At$

$y'' = 2A = -1/2$

$A = -1/4$

$y_p = -\frac{1}{4}t^2$

$$y = C_1 + C_2 t - \tfrac{1}{4}t^2$$

$$y^* = 1 - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{1}{4}t^2$$

$y(0) = 1$: $\quad 1 = C_1 \quad \Rightarrow \underline{C_1 = 1}$

$y(1) = 0$: $\quad 0 = C_1 + C_2 \cdot 1 - \tfrac{1}{4} \cdot 1^2$

$$0 = 1 + C_2 - 1/4 \Rightarrow \underline{C_2 = -3/4}$$

$F = ty' + (y')^2$ $\qquad$ Konveks? $\qquad$ (konveks gir at y^* er min.)

$F'_y = 0 \qquad F''_{yy} = 0 \qquad F''_{yy'} = 0$

$F'_{y'} = t + 2y' \qquad 0 \qquad F''_{y'y'} = 2$

$$H(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det = 0 \geq 0 \\ \operatorname{tr} H(F) = 2 \geq 0 \end{array}\right\} F \text{ konveks i } (y, y')$$

$\Downarrow$

$y^* = 1 - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{1}{4}t^2$ er min

$$(y^*)' = y' = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{4}t = -\tfrac{1}{4} \cdot (3 + 2t)$$

$$J(y^*) = \int_0^1 ty' + (y')^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right)(3+2t) + \tfrac{1}{16}(3+2t)^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 -\tfrac{1}{4}(3t + 2t^2) + \tfrac{1}{16}(9 + 12t + 4t^2) \, dt$$

$$= \Big[-\tfrac{1}{4}\left(3 \cdot \tfrac{1}{2}t^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{3}t^3\right) + \tfrac{1}{16}\left(9t + 12 \cdot \tfrac{1}{2}t^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{3}t^3\right)\Big]_0^1$$

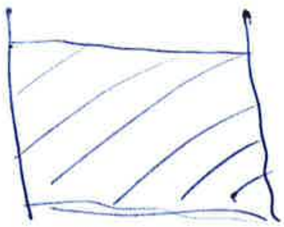
$$= -\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{16}\left(9 + 6 + 4/3\right)$$

$$= \tfrac{1}{48}\left(-3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 4\right) = \frac{41 - 18}{48} = \underline{\frac{23}{48}}$$

(minimumsverdi)

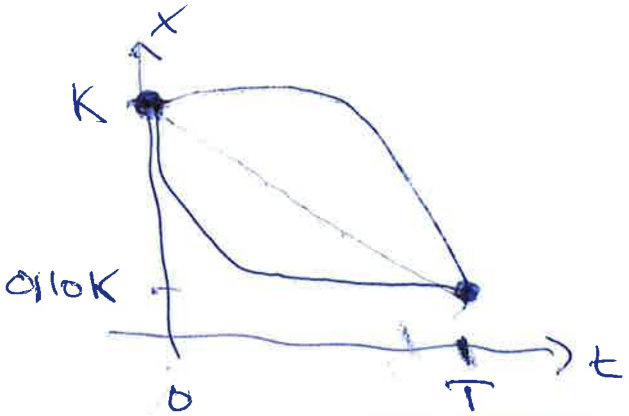
2 Optimal kontroll teori

Eks: Et oljereservoar inneholder K enheter olje. Vi tømmer reservoaret slik at



etter tiden T er det en restverdi på $0.10K$. La $x(t)$ er mengden olje ved tiden t. Så $x(0)=K$

$x(T)=0.10K$



$u(t) = -x'(t)$

utvinningshastighet (antall enheter olje per tidsenhet)

$$\boxed{\max \int_0^T q(t)\cdot u(t) - C(t,x,u)\, dt, \quad \begin{matrix} x(0)=K \\ x(T)=\frac{K}{10} \end{matrix}}$$

$q(t)$: oljepris ved tidspunkt t

$C(t,x,u)$: kostnad per tidsenhet

Variasjonsproblem:

$$\max \int_0^T \underbrace{q(t)\cdot(-x'(t)) - C(t,x,-x')}_{F(t,x,x')}\, dt \quad \text{når} \quad \begin{cases} x(0)=K \\ x(T)=\frac{K}{10} \end{cases}$$

Optimal kontrollteori:

$$\max \int_0^T q \cdot u - C(t,x,u)\,dt \,, \quad \begin{cases} x(0) = K \\ x(T) = K/10 \\ x' = -u \end{cases}$$

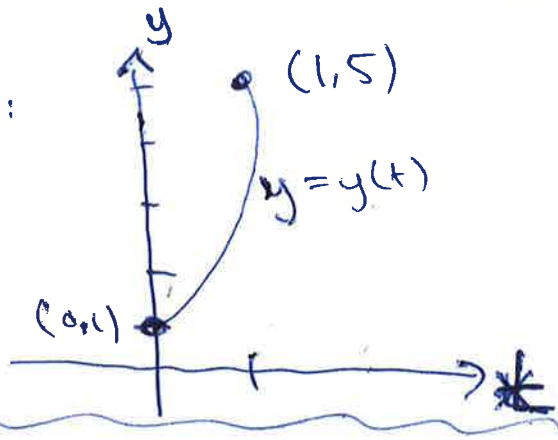
Standard form:

$$\max/\min \int_a^b F(t,y,u)\,dt \,, \quad \text{når} \begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \\ y' = G(t,y,u) \end{cases}$$

$y = y(t)$: tilstandsvariabel

$u = u(t)$: kontrollvariabel

Eks:



$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{array}\right\}$$

$$\min \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dt \quad \text{når}$$

Variasjonsproblem:

$$F = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\min \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,dt \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \\ y' = u \end{cases}$$

max/min $\int_a^b F(t,y,u)\,dt$ når $\left\{ \begin{array}{l} y(a)=y_0 \\ y(b)=y_1 \\ y'=G(t,y,u) \end{array} \right.$

Teori for kontrollteoriproblemer:

Hvis (y^*, u^*) er et optimal par (tilfredsstiller bibetingelsene og gir max/min), så fins en kontinuerlig funksjon $p(t)$ og et tall p_0 (lik 1 eller 0) slik at Hamilton-funksjonen

$$H = p_0 \cdot F(t,y,u) + p \cdot G(t,y,u)$$

oppfyller følgende betingelser:

i) $u = u^*$ gir max/min i $H(y^*, u)$

ii) $p' = -H'_y$

Merk: I i) skal det være max for max-problemer, min for min-problemer

Betingelse i) betyr at $H'_u = 0$ i $u = u^*$.

$$\min \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+u^2}}_{F}\, dt \qquad \begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=5 \\ y' = \underbrace{u}_{G} \end{cases}$$

Løsning:
$y = Bt + C$
$u = B$

rett linje

Løsningsmetode:

$$H = p_0 \cdot F(t,y,u) + p(t)\cdot G(t,y,u)$$

Betingelses: Hvis (y^*, u^*) løser problemet, så er:

i) $H(y^*, u)$ er ~~maks~~ min for $u = u^*$ ← p.g.a. min-problem

ii) $p' = -H'_y$

Husk: $p = p(t)$ er en funksjon

$p_0 = 1$ (eller $p_0 = 0$)

Løsning:

i) $H = p_0 \cdot \sqrt{1+u^2} + p\cdot u$

$$H'_u = p_0 \cdot \frac{1\cdot \cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{1+u^2}} + p = 0$$

ii) $p' = -H'_y = 0 \Rightarrow p(t) = A$

$p_0 = 0$: $H = pu = A\cdot u$ ingen løsn.

$p_0 = 1$:

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + A = 0$$

$$u = -A\sqrt{1+u^2}$$

$$u^2 = A^2(1+u^2) = A^2 + A^2u^2$$

$$u^2(1-A^2) = A^2$$

$$u^2 = \frac{A^2}{1-A^2} \qquad u = \frac{-A}{\sqrt{1-A^2}}$$

$$y = \int u\, dt = \frac{-At}{\sqrt{1-A^2}}$$

$$\boxed{y^* = Bt + C,\; u^* = B}$$

Eks: $\min \int_0^1 \underbrace{x+u^2}_{F}\,dt \quad , \quad \begin{cases} x(0)=0 \\ x(1)=1 \\ x' = \underbrace{-u}_{G} \end{cases}$

$$H = p_0 \cdot (x+u^2) + p \cdot (-u)$$
$$= p_0 (x+u^2) - pu$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Maksimumsprincippet:}} \\ \text{i)} \quad u^* \text{ gir } \cancel{\max}\ \min \text{ i } H(x,u) \\ \text{ii)} \quad p' = -H'_x \end{array}}$$

pga
<u>min-problem</u>

i) $H'_u = p_0 \cdot 2u - p = 0$

$$u = \frac{p}{2p_0}$$

$H''_{uu} = 2p_0 \geq 0$

H konveks i u

$\Downarrow$

$u = \frac{p}{2p_0}$ er ~~maks~~ min.

ii) $p' = -H'_x = -p_0$

<u>$p_0 = 1$</u>: $p' = -1$

$$p = -t + C$$
$$u = \frac{C-t}{2} = \frac{C}{2} - \frac{t}{2}$$
$$x' = -u = -\frac{C}{2} + \frac{t}{2}$$
$$\underline{x = -\frac{C}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + D} = \underline{\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2}$$

<u>$x(0)=0$</u>: $D = 0$

<u>$x(1)=1$</u>: $-\frac{C}{2} + \frac{1}{4} = 1$

$$-\frac{C}{2} = \frac{3}{4}$$
$$C = -\frac{3}{2}$$

(<u>$p_0 = 0$</u>: $H = -pu = -Au \quad H'_u = -A = 0$
$p' = 0 \quad p = A$ } ingen kandidat)

Eks: $\min \int_0^1 x + u^2 \, dt$, $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \\ x' = -u \end{cases}$

Hamilton-funksjon: $H = x + u^2 + p(-u)$

Maksimumsprinsipp: i) $u = u^*$ max i $H(x,u)$

ii) $p'_t = -H'_x$

$\Rightarrow x(t) = \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2$

F konveks/konkav i (x,u)? $F = x + u^2$

$H(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ konveks

$\det HF = 0 \geq 0$

$\operatorname{tr} HF = 2 \geq 0$

F konveks i $(x,u) \Rightarrow x^*$ er min

F konkav i $(x,u) \Rightarrow x^*$ er max

I eks er $x = \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2$ er minimum