FORELESNING 2

ELE 3719

MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

JAN 13, 2015

Plan:

Pensum:

[LS6E]

Kap. 1-3.

① Repetisjon: Vektorer og vektorregning

② Lineære likningssystemer og Gauss' eliminasjonsmetode

③ Lineær uavhengighet og basis

④ Projeksjon på et underrom ← Neste gang

① Repetisjon: Bør kunne

a) Regne med vektorer (addisjon, subtraksjon, skalarmultiplikasjon, lineærkombinasjoner)

b) Regne ut lengden av en vektor og indreproduktet av vektorer

c) Kjenne geometrisk tolkning av vektorer

d) Cauchy-Schwartz' ulikhet: $|\underline{u}\cdot\underline{v}| \leq \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$

e) Projeksjon

f) Lineære underrom, lineær uavhengighet og basis

Lineært underrom: $W = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \{c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n\}$ ← m-vektorer

Lineær uavhengighet: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ er lineært uavhengige

$\Updownarrow$

ingen av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre

$\Updownarrow$

likningen

$$\boxed{x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + x_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}}$$

har kun triviell løsning $\underline{x} = \underline{0}$

$(x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0)$

Lineært avhengige
$\Updownarrow$
minst én av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre

Basis: Hvis $W = \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ er et lineært underrom, så er $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ en basis hvis vektorene er lineært uavhengige.

Eks:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- utspenner det lineære underrommet $W = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$
- er det en basis?

Likning:

$$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \cdot \underline{v}_2 + x_3 \cdot \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3x3 homogent lineært system

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Anta for eksempel at $\underbrace{x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1}$

I så fall:

$$2\underline{v_1} - \underline{v_2} + \underline{v_3} = \underline{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v_3} = -2\underline{v_1} + \underline{v_2}$$

eller

$$\underline{v_2} = 2\underline{v_1} + \underline{v_3}$$

eller

$$\underline{v_1} = \frac{1}{2}\cdot(\underline{v_2} - \underline{v_3})$$

2 Lineære likningssystemer

Defn: En lineær likning i $x_1, x_2, \dots, x_n$ er en likn. på formen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

der $a_1, \dots, a_n, b$ er gitte tall. Den kalles homogen hvis $b = 0$.

$m \times n$ Et lineært system er en samling av lineære likninger i $x_1 \dots x_n$:

$$m \text{ likn.} \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}}_{n \text{ ukjente}} \right.$$

Eks:

a)
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

b)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 7$$

Gauss'-eliminasjonsmetoden:

systematisk metode for å løse alle lineære system

(Utvidet) koeffisient matrise:

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad -2$$

$$\underline{x_1} + 3x_2 + x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = -3x_2 - x_3$$

$$R(2) \leftarrow R(2) + (-2)\cdot R(1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad -5$$

$$\downarrow$$

$$-2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Elementære radoperasjoner:

i) Multiplisere en rad med $c \neq 0$

ii) Bytte om to rader

iii) Legge til et multippel av en rad til en annen rad

ledende koeffisient (eller pivot) = første tall ulik null i en rad

$$-7x_2 - x_3 = 0$$

Trappeform (echelon form)

- alle nullrader nederst
- alle pivoter står lenger til høyre enn pivotene ovenfor

Trappeform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3 fri

pivot-posisjoner = pivoter i trappeformen

Baklengs substitusjon

i) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

ii) $-7x_2 - x_3 = 0$

ii) $-7x_2 - x_3 = 0$

$$-7x_2 = x_3$$

$$x_2 = -\frac{1}{7}x_3$$

i) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

$$x_1 = -3x_2 - x_3$$

$$= -3\cdot\left(-\frac{1}{7}x_3\right) - x_3$$

$$= \frac{3}{7}x_3 - x_3$$

$$x_1 = -\frac{4}{7}x_3$$

Løsning:

$$x_1 = -\frac{4}{7}x_3$$

$$x_2 = -\frac{1}{7}x_3$$

x_3 = fri variabel

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7}x_3 \\ -\frac{1}{7}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -4/7 \\ -1/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der x_3 er fri (kan velges fritt)

Generelt:
- variabler som svarer til kolonner uten pivotposisjon: frie variable
- vi løser for alle andre variabler ved baklengs substitusjon.

(– vi kan skrive løsn. på vektorform)

Gauss:

lineært system $\longrightarrow$ utvidede koeff. matrisen

Elementære radoperasjonene

trappeform $\longrightarrow$ forenklet lineært system

Skrive ned løsningene ved hjelp av baklengs substitusjon

Resultat:

① Enhver matrise kan gjøres om til en trappeform vha. elementære radoperasjoner. Trappeformen er <u>ikke entydig</u> (men pivotposisjonene er entydige)

② Ethvert lineært system har enten

i) Ingen løsninger
ii) Én entydig løsn.
iii) Uendelige mange løsninger

$\longleftrightarrow$

i) Pivot i den siste kolonnen
ii) Ingen pivot i siste kolonne, men pivot i alle andre kolonner
iii) Ingen pivot i siste kolonne, og minst én fri variabel.

$\boxed{\text{Antall frihetsgrader = antall frie variable}}$

Eks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1/7) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & +1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 0 \\ 0 & 1 & +1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

redusert trappeform
- ledende koeff = 1
- alle koeff over pivoter er 0

Eks:

$x + y = 4$

$2x + 2y = 7$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{array}\right) \cdot 2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

pivotposisjon i siste kolonne = ingen løsn.

$0 \cdot x + 0 \cdot y = -1$

Eks: b)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

trappeform

konsistent
ingen frie variable
$\Downarrow$
én entydig løsn.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_3 = 2$$

$x_1 = 1$
$x_2 = -1$
$x_3 = 1$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Defn: Hvis A er en matrise, så definerer vi rangen til A til å være antall pivotposisjoner i matrisen (= antall pivoter i en trappeform).

Skrivemåte: $\boxed{\text{rk } A}$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7 \\ -8 \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -15 & -19 & -29 \\ 0 & -15 & -19 & -29 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -15 & -19 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{rk } A = 2}}$$

Eks:

Det lineære underrommet W er utspent av vektorene

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

i) Er vektorene lineært uavhengige?

ii) Finn en basis for W.

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{0}}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Homogent system:

Bare ii) og iii) som kan inntreffe

Én entydig løsn: $\underline{x} = \underline{0}$

frihetsgrader = uendelig mange løsn.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ -5 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & -10 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3 fri

uendelig mange løsninger

vektorene er lineært avhengige

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underline{x_1} + 3x_2 - x_3 = 0$$
$$-5\underline{x_2} + 6x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{-6x_3}{-5} = \frac{6}{5}x_3$$

$$x_1 = -3x_2 + x_3$$
$$= -3\left(\frac{6}{5}x_3\right) + x_3$$
$$= \frac{-18}{5}x_3 + \frac{5}{5}x_3$$
$$= -\frac{13}{5}x_3$$

$x_1 = -13/5 \cdot x_3$

$x_2 = \frac{6}{5}x_3$

x_3 er fri

$\underline{x_3 = 5}$:

$x_1 = -13 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 5$

$$-13\underline{v_1} + 6\underline{v_2} + 5\underline{v_3} = \underline{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{v_3} = \frac{13}{5}\underline{v_1} - \frac{6}{5}\underline{v_2}$$

$\text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}) = \text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2})$

Resultat: Dersom $W = \text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n})$:

i) Vi danner matrisen A med $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}$ som kolonner:

$$A = \left(\underline{v_1} \,\middle|\, \underline{v_2} \,\middle|\, \underline{v_3} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v_n}\right)$$

Vi finner deretter trappeformen til A.

Dersom $\text{rk}\,A = n \iff$ det er en pivot i hver kolonne, så er $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}\}$ lineært uavhengige.

ii) Dersom $\text{rk}\,A < n \iff$ noen kolonner (minst en) mangler pivot,

så er $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}\}$ lineært avhengige.

I så fall er vektorene i pivotkolonnene lineært uavhengige, og alle andre vektorer er lineærkombinasjoner av vektorene i pivotkolonnene

Altså: Vektorene i pivotkolonnene danner en basis for W.

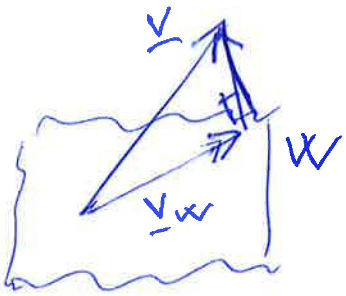
Eks:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er en basis

v_3 er lin. komb. av $\underline{v}_1, \underline{v}_2$



For å regne ut $\mathrm{proj}_W(\underline{v})$ trenger vi en basis for W som er ortogonal (alle vektorene i basisen står normalt på hverandre)