FORELESNING 3

ELE 3719
MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

JAN 20, 2015

Plan:

1. Matriser og matriseregning
2. Determinanter
3. Homogene $n \times n$-systemer
4. Ortogonale matriser og ortonormale baser.

---

1. Matriser og matriseregning

En $m \times n$-matrise er en rektangulær tabell (m rader, n kolonner)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

a_{ij}: tallet i rad i kolonne j

Eks:

$$A = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v}_n \right)$$

Operasjoner på matriser

*** Addisjon, subtraksjon:** $A+B$, $A-B$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

*** Skalarmultiplikasjon:** $r \cdot A$

Eks: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*** Multiplikasjon:** $A \cdot B = AB$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 7\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix}$

$2\times 3 \quad = \quad 3\times 1 \qquad 2\times 1$

Multiplikasjon $A\cdot B$ er definert hvis

$\left.\begin{array}{ll} A & m\times n\text{-matrise} \\ B & n\times p\text{-matrise} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot B$ er $m\times p$-matrise

Lineære systemer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ Matriseformen til det lineære systemet

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ koeff. matrisen

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Eks:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ x + y - z &= 7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y - 1 \cdot z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Identitetsmatrisen: $I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$n \times n$ - matrise

Egenskap: $\boxed{\begin{aligned} A \cdot I &= A \\ I \cdot A &= A \end{aligned}}$

Eks: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I = I_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Regneregler for matriser:

Eks: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

+

mange andre regneregler som er helt lik de vi har for regning med tall.

Men: i) $A \cdot B \neq B \cdot A$

ii) $A \cdot B = 0$ kan skje selv om $A \neq 0$ og $B \neq 0$

Eks: $(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B$

$$= A^2 - AB + BA - B^2$$

$$(\neq A^2 - B^2 !)$$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\#$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a\cdot b = 0$

$a = 0$ eller $a \neq 0$ $\Downarrow$ $\frac{ab}{a} = \frac{0}{a} = 0$

Divisjon for matriser er ikke en veldefinert operasjon: $\frac{A}{B}$ er ikke definert

Def: En matrise A er invertibel hvis det fins en matrise A^{-1} slik at

$$A\cdot A^{-1} = I$$
$$A^{-1}\cdot A = I$$

$2 \neq 0$: $2^{-1} = \frac{1}{2}$ er slik $2\cdot\frac{1}{2} = 1$

Eks:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $ad-bc \neq 0$

A^{-1} fins ikke, $ad-bc = 0$

Eks:

$$x + 2y = 7$$
$$3x - 4y = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Husk:

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\Downarrow$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

hvis A er invertibel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -52 \\ -9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5.2 \\ 0.9 \end{pmatrix}}}$$

Kvadratisk matrise: $m = n$ (antall rader = antall kolonner)

* potenser: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, $\vdots$ } kun for kvadratiske matriser

* invers, determinant: kun mulig for kvadr. matriser

* definisjon: En matrise er diagonal hvis den har formen

kun mulig for kvadr. matriser

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

dvs:
alle koeff. utenfor diagonalen er null

Eks:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{17} = \,?$$

diagonal

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^2&0\\0&3^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}^{17} = \begin{pmatrix}(-1)^{17}&0\\0&3^{17}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&3^{17}\end{pmatrix}$$

Eks:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{10}}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}-4&+2\\+3&-1\end{pmatrix}} = \underbrace{\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

Mao: $aX = Xa$ når a er et tall og X er en matrise

Transponering: $A \rightsquigarrow A^T$

$m\times n$-matrise $\quad$ $n\times m$-matrise

(speiling om diagonalen)

Eks:

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&2&-1\\7&4&0\end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix}1&7\\2&4\\-1&0\end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

En matrise er symmetrisk hvis $A^T = A$.
(kun mulig om A er kvadratisk)

Eks:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

dvs: $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i, j

Egenskaper: $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

$$\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

(4) En matrise kalles ortogonal hvis $A^T = A^{-1}$!

$$A^T = A^{-1} \iff \begin{cases} A^T \cdot A = I \\ A \cdot A^T = I \end{cases}$$

Anta at $A = \left(\underline{v_1} \middle| \underline{v_2} \middle| \cdots \middle| \underline{v_n} \right)$

~~Da er A=~~

$$A^T = \begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \hline \underline{v_2} \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{v_n} \end{pmatrix}$$

Dermed:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \hline \underline{v_2} \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{v_n} \end{pmatrix} \cdot \left(\underline{v_1} \middle| \underline{v_2} \middle| \cdots \middle| \underline{v_n} \right) = \begin{pmatrix} \underline{v_1} \cdot \underline{v_1} & \underline{v_1} \cdot \underline{v_2} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Konklusjon:

Hvis $A = (\underline{v_1} | \underline{v_2} | \cdots | \underline{v_n})$, så er A ortogonal

(dvs $A^{-1} = A^T$) dersom:

i) $\underline{v_1} \cdot \underline{v_1} = \underline{v_2} \cdot \underline{v_2} = \cdots = \underline{v_n} \cdot \underline{v_n} = 1$

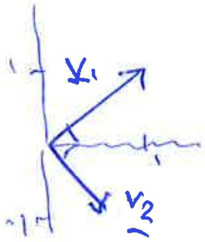
ii) $\underline{v_i} \cdot \underline{v_j} = 0$ når $i \neq j$

$$\Updownarrow$$

i) Alle vektorene har lengde 1

ii) Vektorene står parvis normalt på hverandre

Eks:



$||\underline{v_1}|| = 1$

$||\underline{v_2}|| = 1$

$\Rightarrow A = (\underline{v_1} | \underline{v_2})$ er ortogonal

$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v_1} \cdot \underline{v_2} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$

$||\underline{v_1}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad ||\underline{v_2}|| = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\underline{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{w_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$||\underline{w_1}|| = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} = \sqrt{1} = 1$ $\quad$ er ortogonal

En mengde vekter som tilfredsstiller kravene ovenfor kalles ortonormal, dvs

i) hver vektor har lengde 1

ii) Vektorene står parvis normalt på hverandre

$A^{-1} = A^T \iff A$ er ortogonal

$$\Updownarrow$$

$A = (\underline{v_1} | \underline{v_2} | \dots | \underline{v_n})$ der $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n}\}$ er en <u>ortonormal</u> mengde vektorer

2i) <u>Determinanter</u>

A $n \times n$-matrise $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$

<u>$n=2$:</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc}$

(<u>$n=1$:</u> $A = (a)$ $|A| = a$)

<u>$n>2$:</u>

<u>Eks:</u> <u>kofaktorutvikling</u> (første rad)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$

$$= \underbrace{1 \cdot (+1) \cdot M_{11}}_{C_{11}} + 1 \cdot (-1) \cdot M_{12} + 1 \cdot (+1) \cdot M_{13}$$

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$: formel $(-1)^{i+j}$

$$= 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + \dots$$

M_{ij}: minor på plass (i,j) = determinanten vi får når vi stryker rad i, kolonne j

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+ 1\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= +1\cdot(2\cdot 9 - 3\cdot 4) - 1\cdot(1\cdot 9 - 1\cdot 4)$$

$$+1\cdot(1\cdot 3 - 1\cdot 2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -0\cdot|\cdots| \underline{+1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} - 0\cdot|\cdots|$$

$$= 1\cdot(7\cdot 4 - 3\cdot 1) = \underline{\underline{25}}$$

Tolkning: $|A|$ er et tall når A er kvadratisk

$$\boxed{|A| \neq 0 \iff A \text{ er invertibel}}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +7\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \cancel{0\cdots} + \cancel{0\cdots}$$

Øvre triangulær, dvs alt under diagonalen er null

$$= 7\cdot(4\cdot(-1) - \cancel{0\cdot 1})$$

$$= 7\cdot 4\cdot(-1) = \underline{-28}$$

Hvis A er øvre triangulær kvadratisk matrise, så er

$$|A| = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}}_{\text{produktet av tallene på diagonalen}}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad |T| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{2}$$

Determinant og elementære rad operasjoner

i) Mult. en rad med $c \neq 0$ $\Rightarrow$ determinanten endrer seg med faktor c

ii) Bytte om to rader $\Rightarrow$ determinanten endrer seg med en faktor -1

iii) Legge til et multippel av en rad til en annen rad $\Rightarrow$ determinanten er uforandret

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\underline{96}}$$

Egenskaper: i) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

ii) $|A^T| = |A|$

3) Homogene kvadratiske lineære systemer

$n \times n$ - systemer med $\underline{b} = \underline{0}$

$$\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad \text{der } A \text{ er } n \times n\text{-matrise}}$$

Eks:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= 0 \\ x + 3y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

I så fall har vi:

i) $|A| \neq 0 \iff A$ invertibel, $rk(A) = n \iff$ én løsn. $\underline{x} = \underline{0}$

ii) $|A| = 0 \iff A$ ikke invertibel, $rk A < n \iff n - rk(A)$ frihetsgrader

i) Trappeform $\left(\begin{array}{cccc|c} * & & & & 0 \\ & * & & & 0 \\ & & * & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & * & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Kun én løsning $\boxed{\underline{x} = \underline{0}}$

$\uparrow$
A

$A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \cancel{A^{-1}} \cdot \cancel{A}\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

ii) Trappeform $\left(\begin{array}{cccc|c} * & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{array}\right) \Rightarrow$ frie variable

Konklusjon: $A\underline{x} = \underline{0}$ homogent kvadr. system

$\det(A) \neq 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$ eneste løsning

$\det(A) = 0 \iff n - rk(A) > 0$ frihetsgrader

Om inverse matriser:

$|A| \neq 0 \iff A$ invertibel

Hvordan finne A^{-1} når A er invertibel?

n=2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

n>2: Metode 1: Bruk radoperasjoner (se oppg. 3.17)

Metode 2: Formel:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)}$$

hvor

$$\left(\begin{array}{c}\text{den}\\ \text{adjungerte}\\ \text{matrisen}\end{array}\right) \longrightarrow \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

er den transponerte av kofaktormatrisen