FORELESNING 4 — ELE 3719

EIVIND ERIKSEN — JAN 27, 2015 — MATEMATIKK

Plan:

1. Egenverdier og egenvektorer
2. Lineære transformasjoner

Pensum: [MKF] 1.10

Egenverdier og egenvektorer

A: $n \times n$-matrise (gitt)

$$(*) \quad A \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} \qquad \begin{cases} \underline{x} : & n\text{-vektor} \\ \lambda : & \text{et tall} \end{cases}$$

Defn: Et tall λ er en egenverdi for A huis $(*)$ har ikke-trivielle løsn. $\underline{x} \neq \underline{0}$.

For hver egenverdi λ, så kalles alle løsningene $\underline{x}$ av $(*)$ for egenvektorer for A med egenverdi λ. Mengden av alle disse løsningen skriver vi gjerne E_λ (egenrommet tilhørende λ).

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (n=2)$

2x2-matrise

(*) $A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{aligned} 2x + 4y &= \lambda x \\ 4x + 2y &= \lambda y \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} 2x - \lambda x \quad + \quad 4y \quad &= 0 \\ 4x \quad + \quad 2y - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (2-\lambda)x \quad + \quad 4y \quad &= 0 \\ 4x \quad + (2-\lambda)y &= 0 \end{aligned}}$$

2x2 lineært homogent likn. system m/parameter λ

$\Longrightarrow$ for hver verdi av λ kan vi løse systemet (Gauss-eliminasjon, det.)

<u>Vi kan generelt tenke slik:</u>

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \qquad A\underline{x} - \lambda I \underline{x} = \underline{0}$$

$$A\underline{x} - \lambda \underline{x} = \underline{0} \qquad (A - \lambda I)\underline{x} = 0$$

$$\cancel{(A - \lambda)\underline{x} = \underline{0}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} (*) \quad A\underline{x} = \lambda \underline{x} \\ \Updownarrow \\ (A - \lambda I)\underline{x} \end{gathered}}$$

(*) $A\underline{x} = \lambda \underline{x} \iff (A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Metode for å finne egenverdier:

λ egenverdi hvis $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ har ikke-trivielle løsn. $\underline{x}$

$\Updownarrow$

$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ har ikke-trivielle løsn. $\underline{x}$

$\Updownarrow$

$|A - \lambda I| = 0 \leftarrow$ Karakteristisk likning.

Husk:

Et kvadratisk, lineært, homogent system

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

har

i) kun triviell løsn. $\underline{x} = \underline{0}$ hvis $|A| \neq 0$

ii) har frie variabler og uendelig mange ikke-trivielle løsn hvis $|A| = 0$

Oppsummering:

Egenverdiene til A er løsn. av den karakteristiske likningen

$$|A - \lambda I| = 0$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Karakteristisk likning: $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 4\cdot 4 = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 8}{2}$$

$\underline{\lambda = 6}$ eller $\underline{\lambda = -2}$

Konklusjon: Egenverdiene er $\underline{\lambda_1 = 6}$ og $\underline{\lambda_2 = -2}$

Egenvektorer: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 6}$: $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ ] \mathrm{I} \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-4x + 4y = 0$
y fri

$$\left.\begin{matrix} x = y \\ y = y \end{matrix}\right\} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$E_6 = \{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : y \text{ tall} \}$ egenrommet for $\underline{\lambda_1 = 6}$

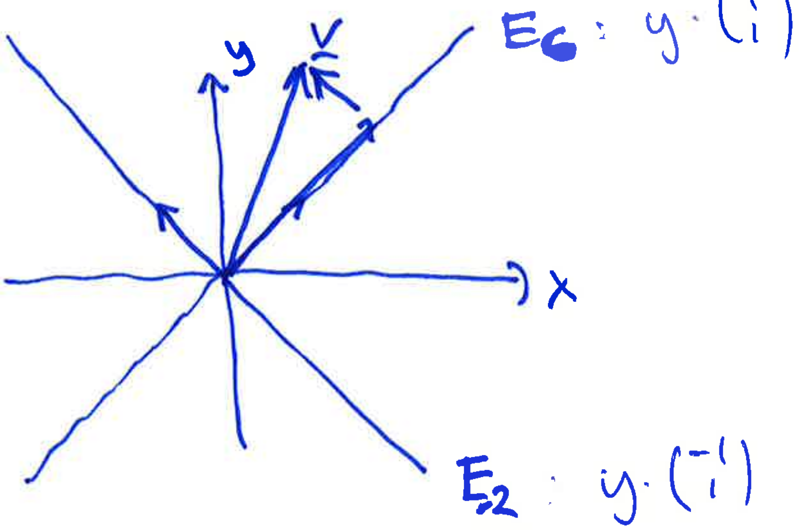
$\underline{\lambda = -2:}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 4x + 4y = 0 \\ y \text{ fri} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -y \\ y = y \end{array}\right\} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_{-2} = \{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : y \text{ tall} \}$ egenrommet for $\underline{\lambda_2 = -2}$



$\underline{x}$ er i E_6 : $A\underline{x} = 6\underline{x}$

$\underline{x}$ er i E_{-2} : $A\underline{x} = -2\underline{x}$

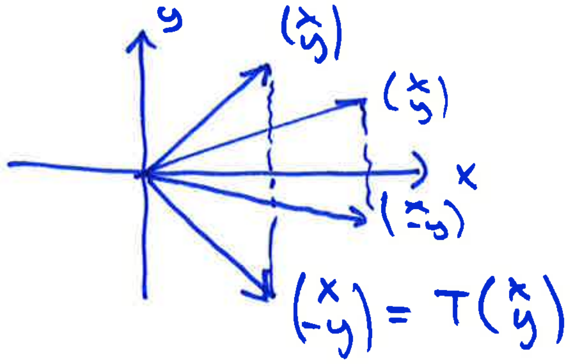
Vi kan tenke på $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ som en funksjon. T kalles en <u>lineær transformasjon</u>.

<u>Husk</u>: $f(x) = 2x$ $\qquad$ $T(\underline{x}) = A\underline{x}$

$x \longmapsto 2x$ $\qquad$ $\underline{x} \longmapsto A\underline{x}$

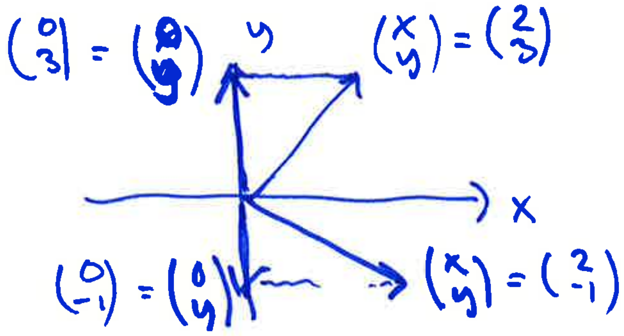
tall $\qquad$ n-vektor $\qquad$ ny n-vektor

<u>Eks</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$



T er speiling om x-aksen

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$



T er projeksjon på y-aksen

$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ $\qquad$ $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ sy \end{pmatrix}$

Litt mer om egenverdier og egenvektorer

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$(n=3)$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(+1\cdot)(-1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2 - 2^2\right) = 0$$

$$(-1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0\right)$$

$-1-\lambda = 0$ eller $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\underline{\lambda = -1}$ eller $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-3)}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$

$\underline{\lambda = 3}$ eller $\lambda = \underline{-1}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3$ ← løsningen $\lambda = -1$ har multiplisitet 2

Hvis A er en $n \times n$-matrise, så blir den karakteristiske likningen

$$(-1)^n \cdot \left(\lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \quad\right) = 0$$

en likning av <u>grad n</u>. Det er høyst n egenverdier.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$+\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ingen løsning $\Rightarrow$ ingen egenverdier

$$(\lambda = \pm\sqrt{-1})$$

Egenvektorer:

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow$

$A - \lambda I$ med $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z fri variabel:

$$2x + \cancel{7y} + 2z = 0 \qquad x = -z$$
$$-3y = 0 \qquad y = 0$$
$$z \text{ er fri} \qquad z = z$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hvis λ er en egenverdi med multiplisitet m, så har $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ mellom 1 og m free variable

$$1 \leq \text{ant. frihetsgrader} \leq m$$

Merk: Hvis vi løser $(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ vha Gauss-eliminasjon, vil løsningen kunne skrives som

$$\underline{x} = s_1 \cdot \underline{v_1} + s_2 \underline{v_2} + \dots$$

der $s_1, s_2, \dots$ er de frie variablene og $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots$ er lineært uavhengige vektorer.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & +2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & +2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow A - \lambda I$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

-1

$\underline{y, z \text{ fri}}$:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{2x} + 7y + 2z = 0 \\ x = -\frac{7}{2}y - z \end{array}\right\} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -7/2\, y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså:

$$E_{-1} = \left\{ y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \underline{v}_1} + z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{v}_2} : y, z \text{ tall} \right\}$$

$= \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, der $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er lineært uavhengige

Altså er $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ en **basis** for E_{-1}.

Tilfellet $n=2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - tr(A)\cdot\lambda + \det(A) = 0}$$

$tr(A) = a+d$
(summen av elementene på diagonalen)

trace / spor

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

Hvis en $n \times n$-matrise A har n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ da har vi

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{i)} \quad |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \\ &\text{ii)} \quad tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \end{aligned}}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 5 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= -10 \end{aligned}}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda \div 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 40}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{65}}{2}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Defn: En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis det fins en invertibel matrise P slik at

$$P^{-1} A P = D$$

er diagonal.

Hvis A har n egenverdier (talt med multiplisitet) og n lineært uavhengige egenvektorer, så kan vi sette

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{egenverdier}} \qquad P = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{\text{egenvektorer}}$$

og A er diagonaliserbar.

A diagonaliserbar $n \times n$-matrise $\iff$ i) A har n egenverdier og ii) A har n lineært uavhengige egenvektorer

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $(n=2)$

Regner ut egenverdier og egenvektorer.

i) **Egenverdier:**

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2}$$

$$\lambda = \underline{3}, \underline{-1}$$

i) $n=2$ egenverdier er oppfylt.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) **Egenvektorer:**

$\underline{\lambda = 3}$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = y$, y fri $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = -y$, y fri $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

fra hver egenverdi kan vi få like mange lin. uavhengige vektorer som vi har frihetsgrader

ii) $n=2$ lineært uavh. egenvektorer er oppfylt

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Konklusjon: A er diagonaliserbar

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$