FORELESNING 5 — ELE 3719

EIVIND ERIKSEN FEB 3, 2015 MATEMATIKK

Plan:

1. Diagonalisering
2. Kvadratiske former

Pensum:

[MKF] 2.1–2.3

---

1. Diagonalisering

Eks: $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & +1 \end{pmatrix}$

Egenverdier: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & +1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(-9)}}{2}$$

$$= 4 \pm 5$$

$$\underline{\lambda_1 = 9}, \quad \underline{\lambda_2 = -1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 9}$: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad -2x + 4y = 0$, $\quad \cancel{4x - 8y = 0}$

$\left.\begin{matrix} x = 2y \\ y \text{ fri} \end{matrix}\right\}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

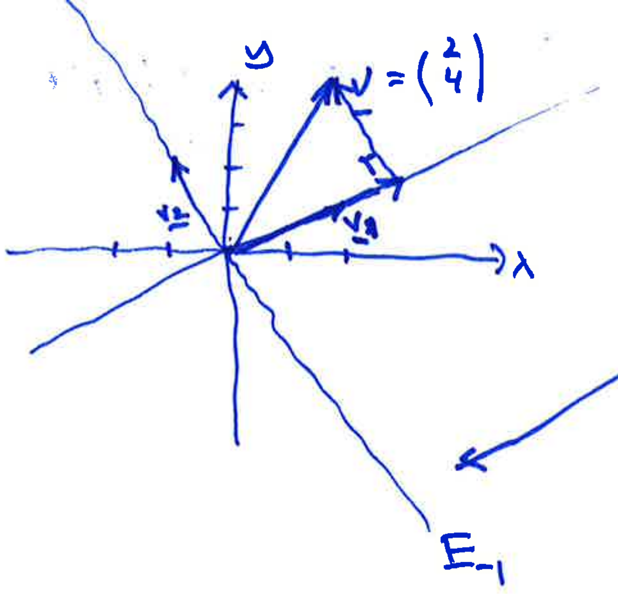
$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(maks 1 lin. uavh. vektor fra E_9 pga. 1 fri variabel)

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \cancel{8x + 4y = 0}$, $\quad 4x + 2y = 0$

$\left.\begin{matrix} x = -y/2 \\ y \text{ er fri} \end{matrix}\right\}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y/2 \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



$E_9 \leftarrow A\cdot\underline{v} = 9\underline{v}$ når $\underline{v}$ er i E_9

$A\underline{v} = -\underline{v}$ når $\underline{v}$ er i E_{-1}

$$\underline{v} = c_1\underline{v}_1 + c_2\cdot\underline{v}_2$$

$$\begin{aligned}A\cdot\underline{v} &= A\cdot(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2)\\ &= c_1A\underline{v}_1 + c_2A\underline{v}_2\\ &= c_1\cdot 9\underline{v}_1 + c_2\cdot(-1)\underline{v}_2\\ &= 9c_1\cdot\underline{v}_1 + (-1)c_2\cdot\underline{v}_2\end{aligned}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9c_1\\-c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}7&4\\4&+1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}30\\12\end{pmatrix}}$$

<u>Defn:</u> A er <u>diagonaliserbar</u> hvis det fins en matrise P som er inverterbar (P^{-1} fins) og slik at

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = D$$

er en diagonal matrise.

<u>I Eks:</u> Velg $P = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$. Da har vi:

$$AP = A\cdot(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = (A\underline{v}_1 \mid A\underline{v}_2) = (\lambda_1\underline{v}_1 \mid \lambda_2\underline{v}_2)$$

$$= (\underline{v}_1|\underline{v}_2)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix} = P\cdot D \quad \text{med } D = \begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$$

så lenge P er inverterbel, dvs når $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ er lineært uavhengige

(n×n-matrise)

A <u>diagonaliserbar</u> $\Longleftrightarrow$ i) n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

ii) n lineært uavhengige egenvektorer $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \left(\underline{v}_1 \middle| \underline{v}_2 \middle| \cdots \underline{v}_n \right)$$

$B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$ (basis)

n lineært uavhengige egenvektorer

Best hvis vi kan velge B som en <u>ortonormal</u> mengde:

i) $\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = 0$ når $i \neq j$

ii) $\|\underline{u}_i\| = 1$

I så fall er

$$P^{-1} = P^T$$

<u>Teorem:</u>

A er diagonaliserbar med $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$ ortonormal

$\Updownarrow$

A symmetrisk

<u>Tolkning:</u> Hvis $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er ortonormal basis av egenvektorer, så kan vi skrive:

$$\underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 \Rightarrow [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Da er

$$[A \cdot \underline{v}]_B = D \cdot [\underline{v}]_B$$

<u>Betyr:</u>

$A\underline{v} = 9c_1 \cdot \underline{v}_1 + (-c_2) \cdot \underline{v}_2$

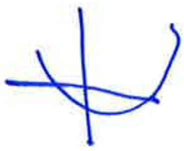
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 9c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

② Kvadratiske former (i n variable)

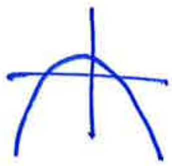
Eks: Annengradsfunksjon i én variabel:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{kvadr. form}} + \underbrace{bx}_{\text{lineær form}} + \underbrace{c}_{\text{konstant-ledd}}$$

$$f'(x) = 2a\cdot x + b$$
$$f''(x) = 2a$$

$a > 0$ 

konveks

$a < 0$ 

konkav

Defn: En kvadratisk form i n variable er et polynom der alle ledd har grad 2.

$n=2$: $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

$n=3$:
$$Q(x_1,x_2,x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2$$

Matriseform:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(\underline{x}) \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Annengradsfunksjon:

$$f(\underline{x}) = \underbrace{Q(\underline{x})}_{\text{kvadr. form}} + \underbrace{L(\underline{x})}_{\text{lin. form}} + \underbrace{c}_{\text{konstant-ledd}}$$

Eks: $Q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 3y^2$

$$A = \begin{array}{cc} & \\ \left(\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 \end{matrix} & \end{array}$$

$a_{11} = 2$

$a_{22} = 3$

$a_{12} \longrightarrow xy$

$a_{21} \longrightarrow yx$

$a_{12} + a_{21} = 6$

Symmetrisk matrise, entydig gitt av Q

$\left\{\begin{matrix}\text{Kvadr. former} \\ \text{i } n \text{ variable}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{symmetriske} \\ n \times n\text{-matriser}\end{matrix}\right\}$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2$

Symm. 3x3

Generelt er

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

, der A er den symmetriske matrisen til Q.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\underline{x}^T A \underline{x} = (x\ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (2x + 3y \quad 3x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (2x + 3y)x + (3x + 3y)y$$

$$= 2 \cdot x \cdot x + \underbrace{3 \cdot y \cdot x + 3 \cdot xy}_{} + 3 \cdot y \cdot y$$

$$= 2x^2 + 6xy + 3y^2$$

Definitthet

La $Q(x_1,\dots,x_n) = Q(\underline{x})$ være en kvadratisk form i n variable, og la A være den tilsvarende symmetriske matrisen.

Q kalles positiv semidefinitt hvis $Q(\underline{x}) \geq 0$ for alle $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$

— || — negativ semidefinitt " $Q(\underline{x}) \leq 0$ for alle $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$

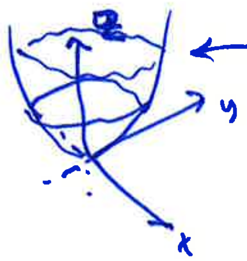
— || — indefinitt hvis $Q(\underline{x})$ kan ta både positive og negative verdier (dvs hverken positiv eller negativ semidefinitt)

Spesialtilfeller:

Q kalles positiv definitt hvis $Q(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$

Q kalles negativ definitt hvis $Q(\underline{x}) < 0$ for alle $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$



$z = f(x,y) = x^2+y^2$

$f(0,0) = 0$

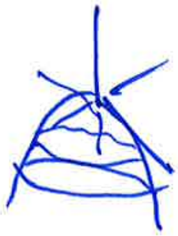
$f(x,y) > 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$

$\Downarrow$

pos. semidefinitt

pos. definitt

Eks. $f(x,y) = -x^2 - y^2$



negativ definitt

$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$

$f(1,0) = 2 > 0$

$f(0,1) = -3 < 0$

indefinitt

Vi ser følgende:

Hvis $Q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$,

da har vi:

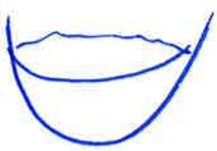
$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} > 0$: pos. definitt

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \geq 0$: pos. semidefinitt

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} < 0$: neg. definitt

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \leq 0$: neg. semidefinitt

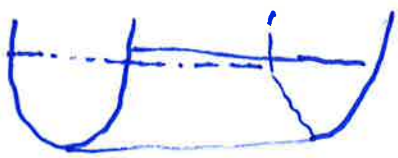
$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ har både positive og negative tall : indefinitt



pos. definitt

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$a_{11} = 1 \quad a_{22} = 1$



pos. semidefinitt

$f(x,y) = x^2$

$a_{11} = 1 \quad a_{22} = 0$

Merk:

$Q(x_1,\dots,x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(kun kvadratledd)

diagonal matrise

Hva med følgende eksempel?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ som svarer til $Q(x,y,z) = x^2 - 6xz + 3y^2 + z^2$

kan gi både positive og negative bidrag

Vi kan diagonalisere A (med ortonormal basis av egenvektorer)

$\Rightarrow$ Vi kan skrive Q som

$$Q = \lambda_1 \cdot u_1^2 + \lambda_2 \cdot u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2$$

ved hjelp av diagonaliseringen.

$= 3u_1^2 + 4u_2^2 - 2u_3^2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0$$

$\lambda = 3, \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-8)}}{2} = 1 \pm 3$

$\underline{\lambda_1 = 3}, \ \underline{\lambda_2 = 4}, \ \underline{\lambda_3 = -2}$

Egenvektorer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 3:}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = 0$, $z = 0$, y er fri

$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v_1} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\underline{\lambda = 4:}$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$ $x = -z$, $y = 0$, z fri $\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \to$ deler på $\sqrt{2}$ for å få lengde 1.

$\underline{v_2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\underline{\lambda = -2:}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$ $x = z$, $y = 0$, z fri $\underline{x} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$ ortonormal basis av egenvektorer

$\underline{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \left(\underline{v_1} \,|\, \underline{v_2} \,|\, \underline{v_3} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Vet at $P^{-1} = P^T$.

Vet at: i) $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ med $\left\{ \begin{array}{l} D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

ii) $P^{-1} = P^T$

Definerer: $\underline{x} = P \cdot \underline{u}$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{u} = P^{-1} \cdot \underline{x} = P^T \cdot \underline{x}$$

$$P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = x_2$$
$$u_2 = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}}$$
$$u_3 = \frac{x_3 + x_1}{\sqrt{2}}$$

Vi har dessuten at:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= \underline{x}^T A \underline{x} \\ &= (P\underline{u})^T A \cdot (P\underline{u}) \\ &= \underline{u}^T \cdot P^T A P \underline{u} = \underline{u}^T \cdot (P^{-1} A P)\, \underline{u} \\ &= \underline{u}^T \cdot D \cdot \underline{u} \\ &= \underline{3u_1^2 + 4u_2^2 - 2u_3^2} \end{aligned}$$

Q er indefinitt (siden $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$)

Teorem

Hvis $Q(x_1, \dots, x_n)$ er en kvadratisk form i n variable, så ser vi på den kvadratiske symmetriske matrisen A og dens egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Da har vi:

Q positiv semidefinitt $\iff \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

" definitt $\iff \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$

Q negativ semidefinitt $\iff \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$

" definitt $\iff \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$

Q indefinitt $\iff$ vi har både positive og negative egenverdier

Grunnen er at Q kan skrives

$$Q = \lambda_1 \cdot u_1^2 + \lambda_2 \cdot u_2^2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n^2$$

for nye variabler $u_1, \dots, u_n$.

En annengradsfunksjon i n variable kan skrives:

$$f(\underline{x}) = \underbrace{Q(\underline{x})}_{\text{kvadr.}} + \underbrace{L(\underline{x})}_{\text{linear}} + \underbrace{C}_{\text{konst.}}$$

$$= x^T A \underline{x} + B \cdot \underline{x} + C$$

der A er symmetrisk $n \times n$-matrise, B er $1 \times n$-matrise
C er et tall

Linear form:

$$L(\underline{x}) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

$$= (b_1\ b_2 \dots b_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \cdot \underline{x}$$

Vi kan skrive de partiell-deriverte til f som

holder hvis f er annengradsfunksjon

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2A \cdot \underline{x} + B^T$$

Stasjonære pkt: $2A \cdot \underline{x} + B^T = \underline{0}$ ← lineært system

Konveks/konkav: f konveks $\Leftrightarrow$ A positiv semidefin. ←

f konkav $\Leftrightarrow$ A negativ semidefinitt

alle stasjonære pkt er globale min

alle stasjonære pkt er globale maks