Forelesning 7

Eivind Eriksen

Feb 24, 2015

ELE 3719

Matematikk

Plan:

1. Betinget sannsynlighet og uavhengighet
2. Stokastiske variable

Pensum:

[S] Kap 4
Kap 5.1–5.3, 5.6

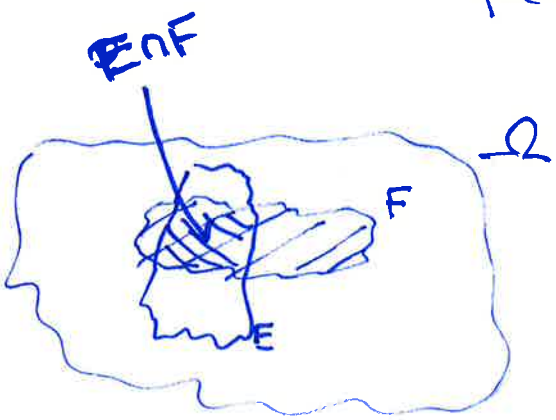
---

1. Betinget sannsynlighet og uavhengighet:

Betinget sannsynlighet:

$p(E \mid F)$ = sannsynligheten for E skal inntreffe, gitt at vi vet at F har inntruffet/skal inntreffe

$$= \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$



Defn:

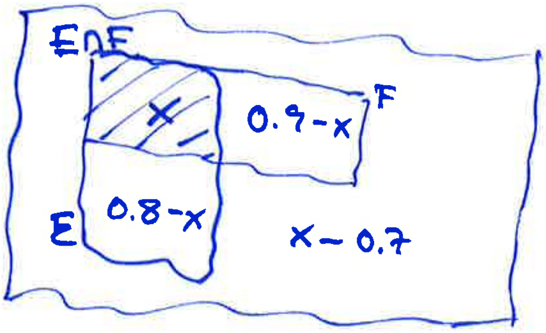
E og F er uavhengige hendelser hvis

$$p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$$

$$\Updownarrow$$

$$p(E \mid F) = \frac{p(E) \cdot p(F)}{p(F)} = p(E)$$

Eks: Anta at $\begin{cases} p(E) = 0.8 \\ p(F) = 0.9 \end{cases}$. Hva er $p(E \cap F)$?



$$p(E \cap F) = x$$

$$p(E \cap F) = x$$
$$p(E \cap F^c) = 0.8 - x$$
$$p(E^c \cap F) = 0.9 - x$$
$$p(E^c \cap F^c) = \underline{x - 0.7}$$

$x \geq 0.7$ fordi $p(E^c \cap F^c) \geq 0$

$x \leq 0.8$ fordi $p(E \cap F^c) \geq 0$

dvs: $0.7 \leq x \leq 0.8$

$x = 0.7$: $\quad p(E|F) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0.7}{0.9} = 7/9 \simeq 0.77\ldots$

$x = 0.72$: $\quad p(E|F) = p(E) = 0.80$

$x = 0.8$: $\quad p(E|F) = \dfrac{0.8}{0.9} = 8/9 \simeq 0.88\ldots$

Bonferroni's ulikhet:

$$\underbrace{p(E) + p(F) - p(E \cap F)}_{p(E \cup F)} \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{p(E \cap F) \geq p(E) + p(F) - 1}$$

Opps. 2.13.1 : Prisoner's paradox

Tre fanger A, B, C vet at to av fangene løslates, men den tredje straffes.
Sannsynligheten for at A straffes er 1/3.
Fangevokteren forteller A at B løslates.

A: Fange A straffes $\qquad p(A) = 1/3$

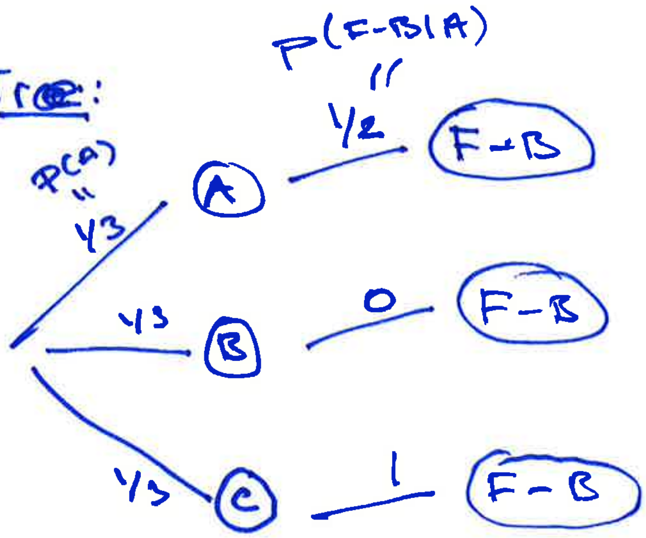
B: -"- B " $\qquad p(B) = 1/3$

C: " C straffes $\qquad p(C) = 1/3$

F-B: Fangevokteren sier at B ~~straffes~~ løslates.

Finn $p(A \mid F\text{-}B)$, $p(A^c \mid F\text{-}B)$

Tre:



$$p(A \mid F\text{-}B) = \frac{p(A \cap F\text{-}B)}{p(F\text{-}B)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{1+2} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$p(A^c \mid F\text{-}B) = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$p(F\text{-}B \mid A) = \frac{p(F\text{-}B \cap A)}{p(A)}$$

$$\Uparrow$$

$$p(F\text{-}B \cap A) = p(A) \cdot p(F\text{-}B \mid A)$$

2 Stokastiske variable

En variabel X, der verdien avhenger av utfallet av et stokastisk forsøk, kalles en <u>stokastisk variabel</u>.

<u>Eks:</u> Vi kaster mynt / kron to ganger.
X = antall kron.

ω	p	$X = X(\omega)$	$p(X=x)$
MM	1/4	0	1/4 $= p(X=0)$
MK	1/4	1	1/2 $= p(X=1)$
KM	1/4	1	
KK	1/4	2	1/4 $= p(X=2)$

$X=0$: $\{MM\}$
$X=1$: $\{MK, KM\}$
$X=2$: $\{KK\}$

<u>I eksempelet:</u>

$x=0$: $p(0) = 1/4$
$x=1$: $p(1) = 1/2$
$x=2$: $p(2) = 1/4$

En stokastisk variabel har noen <u>mulige verdier</u>

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$

og tilhørende <u>sannsynligheter</u>

$p(x_1) = p(X=x_1)$
$p(x_2) = p(X=x_2)$
$\vdots$
$p(x_n) = p(X=x_n)$

En stokastisk variabel er diskret hvis de mulige verdiene er en diskret mengde, og kontinuerlig hvis de mulige verdiene er en kontinuerlig mengde.

Vi ser på diskrete variable i denne forelesningen, og kontinuerlige i forelesning 8.

Eks: Vi kaster mynt/kron til vi får Kron.
X = antall kast

$$\Omega = \{K, MK, MMK, \ldots\}$$

$$X = 1, 2, 3, \ldots \quad \leftarrow \text{diskret mengde}$$

$$p(x) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Sannsynlighetstetthet:

$$p(x) = f(x) := p(X=x)$$

Krav:

$$\begin{cases} i) & p(x) \leq 1, \; p(x) > 0 \\ ii) & \sum_x p(x) = 1 \end{cases}$$

Kumulative fordelingsfunksjon:

$$F(x) := p(X \leq x) = \sum_{x' \leq x} p(x')$$

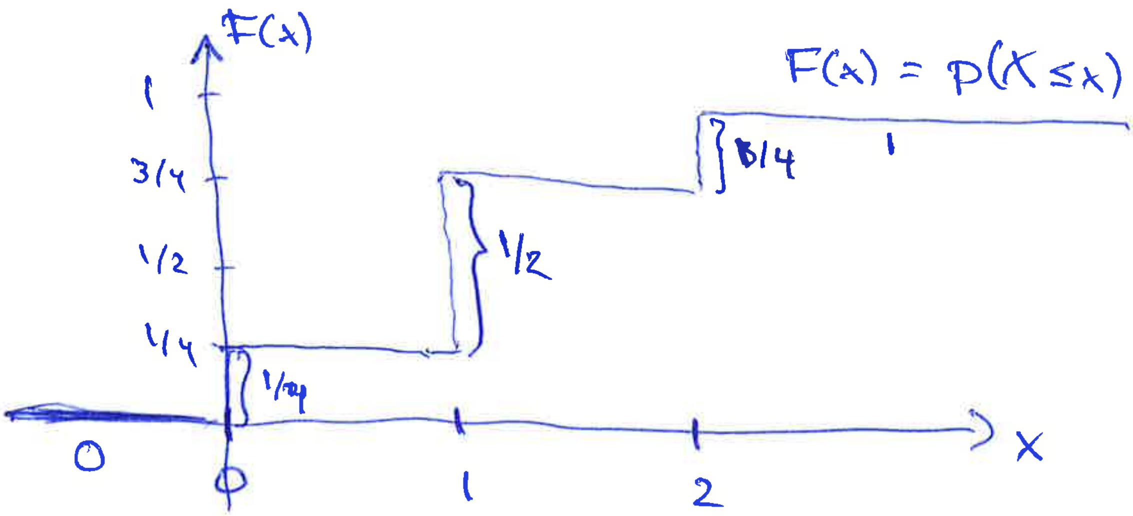
Eks: X = antall kron (når vi kaster to ganger)

Mulige verdier: $x = 0, 1, 2$

Sannsynligheter: $p(0) = 1/4$, $p(1) = 1/2$, $p(2) = 1/4$

Sannsynlighetsfordeling $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \end{cases}$$



X diskret $\Longleftrightarrow$ $F(x)$ er en trappefunksjon

Krav til sannsynlighetsfordeling:

i) $F(x)$ monotont voksende

ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

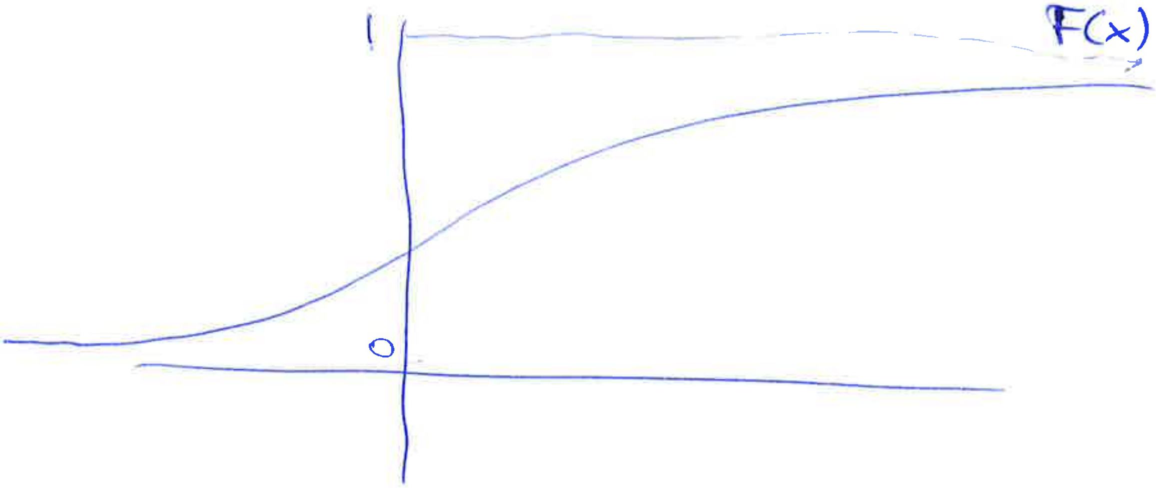
iii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$F(x)$ tilfredsstiller disse kravene

$\Updownarrow$

$F(x)$ er kum. fordelingsfunksjon til en stok. variabel

Kontinuerlig variabel



Forventning og varians

Hvis X er en diskret stok. variabel, så er forventningsverdien

$$E(X) = \sum_{x} x \cdot p(x)$$

der summen tas over alle mulige verdier x for X. En vektet sum med sannsynlighetene som vekter.

Eks: X = ant kron på to kast

$$E(x) = \sum_{x=0,1,2} x \cdot p(x) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2)$$

$$= 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{4}$$

$$= 1/2 + 1/2 = \underline{\underline{1}}$$

Eks: Vi kaster to terninger, X = summen

$$E(X) = 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + \dots + 12 \cdot p(12)$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

Eks: Vi kaster mynt til vi får kron. X = ant kast

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots = ?$$

Forventningsverdien $E(X)$ kan være endelig eller uendelig.

Varians: X diskret variabel med endelig forventning $\mu = E(X)$:

$$Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_x (x-\mu)^2 \cdot p(x)$$

Eks: Vi kaster mynt/kron, X = antall kron
$\mu = 1$

$$Var(X) = E\left[(X-1)^2\right] = \sum_{x=0,1,2} (x-1)^2 \cdot p(x)$$
$$= (0-1)^2 \cdot p(0) + (1-1)^2 \cdot p(1) + (2-1)^2 \cdot p(2)$$
$$= 1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 = 2/4 = 1/2$$

$$Std(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1/2}$$

Regneregler: Forventning / varians

X Stok. variabel med endelig forventning
a, b konstanter (tall)

i) $E(aX+b) = aE(X)+b$
ii) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$
iii) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Det er alltid slik at forventningsverdien til en $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} E(2X+3) &:= \sum_x (2x+3)\cdot p(x) \\ E(f(x)) &:= \sum_x f(x)\cdot p(x) \end{aligned}\right\} \text{definisjon}$$

i) $$E(aX+b) = \sum_x (ax+b)\cdot p(x) = \sum_x \left[a x p(x) + b p(x)\right]$$

$$= \sum_x a x p(x) + \sum_x b p(x)$$

$$= a\cdot E(X) + b\cdot 1 = \underline{aE(X)+b}$$

iii) $$Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \underline{E(X^2) - E(X)^2}$$

Fordelingsfunksjoner

i) Binomisk   ii) Poisson   iii) Geometrisk
iv) Uniform

iv) Uniform: $\boxed{X \sim \text{Uniform}(n)}$

Mulige verdier: 1, 2, 3, ..., n
og alle er like sannsynlige $p(1) = p(2) = \ldots = \frac{1}{n}$

Eks: X = ant. øyne når vi kaster en terning

$$X = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$
$$p = \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + n \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \left(\frac{\cancel{n} \cdot (n+1)}{2} \right)$$
$$= \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \left(1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + n^2 \cdot \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2$$
$$= \ldots = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

1) **Binomisk**: Vi starter n like og uavh. forsøk, sann. for suksess i en gjentagelse p,

X = antall suksesser

$$\boxed{X \sim \text{Binomisk}(n, p)}$$

Mulige verdier: $0, 1, 2, \ldots, n$

Sannsynlighet: $p(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = {}_nC_i$ = antall ombyttinger av $\underbrace{SS\ldots S}_{i}\underbrace{FF\ldots F}_{n-i}$

For eksempel: $n = 4$

$i = 0$:	FFFF	$\binom{4}{0} = 1$	$1 \cdot (1-p)^4$
$i = 1$:	SFFF	$\binom{4}{1} = 4$	$4 \cdot p \cdot (1-p)^3$
$i = 2$:	SSFF	$\binom{4}{2} = 6$	
$i = 3$:	SSSF	$\binom{4}{3} = 4$	
$i = 4$:	SSSS	$\binom{4}{4} = 1$	

$E(X) = \underline{n \cdot p}$ $\quad$ $Var(X) = \underline{np(1-p)}$

iii) Poisson fordeling: $\boxed{X \sim \text{Poisson}(\lambda)}$

Hvis X er antall forekomster av en hendelse per tidsenhet, så er $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dersom λ er forventet antall ~~forekomster~~ per tidsenhet.

Mulige verdier av X: 0, 1, 2, 3, ...,

Sannsynligheter:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Eks:

$$p(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$p(1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}$$

$$p(2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

$\vdots$

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} + \dots$$

$$e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \dots\right)$$

$$e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$E(X) = \underline{\lambda}$ $\qquad$ $Var(X) = \underline{\lambda}$

iii) <u>Geometrisk:</u>

Vi gjentar uavh. forsøk, der sannsynlighet for suksess i hvert forsøk er p, er antall gjentakelser X før første suksess <u>geometrisk fordelt</u>

$$X \sim \text{Geometrisk}(p)$$

<u>Mulige verdier:</u>

$x = 1, 2, 3, \ldots$

og $p(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}$

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$