Rep. fra sist: separable diff. likn.
1. ordens — " —
system av — " —
Nytt: 2. ordens — " —
Variasjonsregning.

Separable differensialligninger

$$\boxed{y'(t) = f(y)\cdot g(t)}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\cdot g(t)$$

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(t)\,dt$$

eks.

$$y' = y^2 \cdot \ln t$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \ln t\,dt$$

$$-\frac{1}{y} = t\ln t - t + c$$

$$y = \frac{1}{t - t\ln t - c}$$

$$\int \ln t\,dt = \int \underset{u'}{1}\cdot \underset{v}{\ln t}\,dt$$

$$= t\cdot \ln t - \int t\cdot \frac{1}{t}\,dt$$

$$= t\ln t - t + c$$

Dette er den generelle løsningen.
Partikulær løsning f.eks. når $y(1) = 2$

$t = 1 \Rightarrow y = 2$

$$2 = \frac{1}{1 - \underbrace{1\cdot\ln 1}_{0} - c}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{t - t\ln t - \frac{1}{2}}$$

1. ordens lineære diff. likn.

$$\boxed{y' + a(t)\cdot y = b(t)}$$

a, b konstanter.

<u>eks.</u>

$$y' + 4y = 2$$

Integrerende faktor $e^{\int a(t)\,dt}$

her: e^{4t} (e^{at})

$$y'\cdot e^{4t} + y\,4e^{4t} = 2\cdot e^{4t}$$

$$(\underset{u}{y}\cdot \underset{v}{e^{4t}})' = 2e^{4t}$$

$$y\cdot e^{4t} = \int 2e^{4t}\,dt$$

$$y\cdot e^{4t} = 2\cdot\tfrac{1}{4}e^{4t} + C \quad \big|\cdot e^{-4t}$$

$$\underline{\underline{y = \tfrac{1}{2} + C\cdot e^{-4t}}}$$

$$y' + ay = b$$

$$\vdots$$

$$y = \frac{b}{a} + C\cdot e^{-at}$$

hvis $a > 0$

$$\lim_{t\to\infty} y = \frac{b}{a}$$

Tilbud : $S = 800 + 4p$

Etterspørsel : $D = 2000 - 2p$

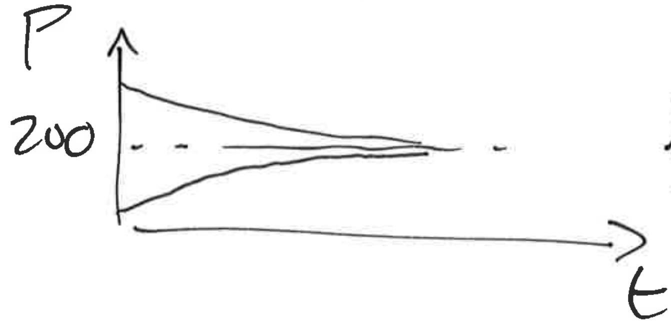
$p' = 0.5(D - S)$

$$p' = 0{,}5(1200 - 6p)$$

$$p' = 600 - 3p$$

$$p' + 3p = 600$$

$$p = \frac{600}{3} + Ce^{-3t} = 200 + Ce^{-3t}$$



$\lim\limits_{t\to\infty} P = 200$

I det generelle tilfellet:

$$S = \alpha + \beta \cdot P$$
$$D = a - bP$$
$$p' = \lambda(D - S)$$
$$\Downarrow$$
$$p' = \lambda\big((a-\alpha) - p(b-\beta)\big)$$
$$p' + \underbrace{\lambda(b-\beta)}\cdot p = \underbrace{\lambda(a-\alpha)}$$
$$p = \frac{\cancel{\lambda}(a-\alpha)}{\cancel{\lambda}(b+\beta)} + Ce^{-\lambda(b+\beta)\cdot t}$$

$\lim\limits_{t\to\infty} p = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$ hvis $a - \alpha > 0$

$\Downarrow$

$a > \alpha$

hvis $b(t)$ er en funksjon av t
(samme fremgangsmåte hvis $a(t)$ funksjon også)

<u>eks.</u>

$$y' - y = t$$

Integrerende faktor: $e^{\int a(t)\,dt}$

Her $e^{\int -1\,dt} = e^{-t}$

$$y' \cdot e^{-t} + (-1) y \cdot e^{-t} = t \cdot e^{-t}$$

$$(y \cdot e^{-t})' = t \cdot e^{-t}$$

$$y \cdot e^{-t} = \int \underset{u}{t} \cdot \underset{v'}{e^{-t}}\,dt$$

$$y e^{-t} = \underset{u}{t} \cdot \underset{v}{(-e^{-t})} - \int 1 \cdot (-e^{-t})\,dt$$

$$y \cdot e^{-t} = -t e^{-t} - e^{-t} + c \quad | \cdot e^{t}$$

$$\underline{\underline{y = -t - 1 + C \cdot e^{t}}}$$

System av diff. liken.

<u>eks.</u>

$$x' = 3x + 2y$$
$$y' = 2x + 3y$$

Vi vil finne $x(t)$ og $y(t)$

Systemet kan skrives på formen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$* \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \underline{v_1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot \underline{v_2} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

der C_1 og C_2 er konstanter
λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A
$\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$ er egenvektorene til A

<u>Løsning:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finner egenverdiene:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

abc

$$\lambda_1 = 1 \text{ og } \lambda_2 = 5$$

Finner egenvektorene:

$\lambda_1 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 2x + 2y = 0$
$y = -x$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 5 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -2x + 2y = 0 \Rightarrow x = y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$*$ gir : $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t}}}$

2. ordens differensiallikninger

– lineære med konstante koeffisienter.

$$\boxed{y'' + a \cdot y' + by = f(t)}$$

Vi bruker karakteristisk likning og addisjonsprinsippet (superpos. prins.)

<u>Eks</u>

$$y'' - 3y' + 2y = 6$$

<u>Løsning</u> : $y = y_h + y_p$

y_h finner vi ved å løse den homogene likningen:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Vi løser den karakteristiske likningen:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

abc

$$r_1 = 1 \,, \; r_2 = 2$$

Når den karakteristiske likningen har to forskjellige reelle løsninger, er den homogene løsningen:

$$y_h = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

i eks:

$$y_h = C_1 \cdot e^{t} + C_2 e^{2t}$$

y_p : Gjetter $y = A$ er en løsning

$y'' = 0 \quad y' = 0$

$0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot A = 6$

$A = 3$

$y_p = 3$

$y = y_h + y_p$

$$y = \underline{\underline{C_1 \cdot e^{t} + C_2 e^{2t} + 3}}$$

<u>øvelse</u>:

Finn løsningen til:

$* \quad y'' - 5y' + 4y = 1$

<u>Løsning</u>:

homogene likningen

$y'' - 5y' + 4y = 0$

med karakteristisk likning

$r^2 - 5r + 4 = 0 \overset{abc}{\Longrightarrow} r_1 = 1, \ r_2 = 4$

y_h : $y_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}$

y_p : Anta $y = A$ løsning

$* \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$$y = \underline{\underline{C_1 e^{t} + C_2 e^{4t} + \frac{1}{4}}}$$

Kontroll: $y' = C_1 \cdot e^t + 4C_2 e^{4t}$

$y'' = C_1 e^t + 16C_2 e^{4t}$

Venstre side i $*$:

$$y'' - 5y' + 4y = C_1 e^t + 16C_2 e^{4t}$$
$$- 5C_1 e^t - 20C_2 e^{4t}$$
$$+ 4C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$
$$= 1 \quad \text{stemmer!}$$

<u>eks.</u>

$$y'' - 4y' + 4y = 1$$

Homogen likning: $y'' - 4y' + 4y = 0$

Karakter. —"—: $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Den karakteristiske likningen har to sammenfallende røtter og den homogene likningen har løsning:

$$y_h = C_1 \cdot e^{r_0 t} + C_2 \cdot t \cdot e^{rt}$$

i <u>eks.</u> $y_h = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 t e^{2t}$

Gjetter $y = A$ er en løsning

$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$$y = \underline{\underline{C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{1}{4}}}$$

eks. $y'' - 4y' + 4y = t$

y_h blir som i forrige eksempel

$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$

Gjetter at $y = At$ er løsning

$\Rightarrow y' = A \Rightarrow y'' = 0$ som gir

$$0 - 4 \cdot A + 4At = t$$

$$\vdots$$

$$A = \frac{t}{4(t-1)} = y_p$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{t}{4(t-1)}}}$$

~~eks.~~ øvelse:

Løs: $y'' + 4y' + 4y = 5$ når $y(0) = \frac{1}{4}$, $y(1) = \frac{5}{4}$

hom. l.: $y'' + 4y' + 4y = 0$

kar. l: $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$

$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

y_p: Anta $y = A$ er løsning.

$$4A = 5$$

$$A = \frac{5}{4} = y_p$$

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{5}{4}$$

Vi kan bestemme C_1 og C_2 ved å benytte initialbetingelsene:

$$y(0) = \frac{1}{4} \qquad t = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = C_1 + C_2 \cdot 0 \cdot 1 + \frac{5}{4} \Rightarrow C_1 = -1$$

$$y = -e^{-2t} + c_2 t \cdot e^{-2t} + \frac{5}{4}$$

$$y(1) = \frac{5}{4} \quad , \quad t = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} = -e^{-2} + c_2 e^{-2} + \frac{5}{4} \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\underline{\underline{y = -e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{5}{4}}}$$

<u>eks.</u>

$$y'' - 4y' + 7y = 4$$

hom. likn: $y'' - 4y + 7y = 0$

Kar. ligm: $r^2 - 4r + 7 = 0$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{-3}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} \cdot i$$

Vi har to komplekse løsninger på formen $\alpha \pm \beta \cdot i$ der $\alpha = 2$ og $\beta = \sqrt{3}$

Den homogen likningen har løsning

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cdot \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

i eks.

$$y_h = e^{2t}(c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t))$$

y_p : Gjetter $y = A$ løsning

$$0 - 4 \cdot 0 + 7 \cdot A = 4$$

$$\Downarrow$$

$$A = \frac{4}{7}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\underline{\underline{y = e^{2t} \cdot (c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t)) + \frac{4}{7}}}$$

<u>øvelse</u>

løs $y'' + 4y' + 5y = 10$

kar. likn. til homogen likning

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm i$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 1$$

$$y_h = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

y_p : Gjetter $y = A$ løsning

$$5A = 10$$

$$A = 2 = y_p$$

$$\underline{\underline{y = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2}}$$

$y'' + ay' + by = 0$ homog. likn.

$r^2 + ar + b = 0$ kar. likn

$\Downarrow$

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

3 muligheter:

$a^2 - 4b > 0 \implies y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

$a^2 - 4b = 0 \implies y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$

$a^2 - 4b < 0 \implies y = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$

Variasjonsregning

Finn maks/min $J(y) = \int_a^b F(t, y, \dot{y})\, dt$

når $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$

Dette løses ved å skrive opp Euler-likningen for problemet og løse den.

Euler-likning: $F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{\dot{y}}) = 0$

eks.

Finn maks $\int_0^1 (-y^2 - \dot{y}^2)\, dt$ når $y(0) = 0$ og $y(1) = e^2 - 1$

Løsning:

$F = -y^2 - \dot{y}^2$

$F'_y = -2y$ og $F'_{\dot{y}} = -2\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}(F'_{\dot{y}}) = -2\ddot{y}$

Euler likningen for problemet blir

$$-2y + 2\ddot{y} = 0$$

Den karakteristiske likningen: $2r^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1$

Da er $y = c_1 \cdot e^t + c_2 e^{-t}$

som er den generelle løsningen.

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2$

$C_2 = -C_1$

$y(1) = e^2 - 1 \Rightarrow e^2 - 1 = C_1 \cdot e - C_1 e^{-1} \quad | \cdot e$

$e(e^2-1) = C_1 (e^2 - 1)$

$C_1 = e$

$C_2 = -e$

$y = e \cdot e^t - e \cdot e^{-t}$

$$\underline{\underline{y^* = e^{t+1} - e^{1-t}}}$$

$F'_y = -2y \Rightarrow F''_{yy} = -2 \qquad F''_{y\dot{y}} = 0$

$F'_{\dot{y}} = -2\dot{y} \Rightarrow F''_{\dot{y}y} = 0 \qquad F''_{\dot{y}\dot{y}} = -2$

$F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = (-2)(-2) - 0^2 = 4 > 0$

$F''_{yy} = -2 < 0$

Dermed maksimerer y^* problemet