Sist:

- pivot-posisjon — pos til 1. element i en rad som er $\neq 0$.
- trappeform — når alle posisjoner under en pivot er 0.
- et likningssystem er <u>ikke konsistent</u> (ingen løsning)

$\Updownarrow$

Det finnes en pivot i siste kolonne av $\hat{A}$.

- et system har uendelig mange løsninger

$\Updownarrow$

Ingen pivot i siste kolonne av $\hat{A}$ og vi har minst en kolonne uten pivot.

- et system har en entydig løsning

$\Updownarrow$

A og $\hat{A}$ har like mange pivot-pos.

$$\left(Rk(A) = Rk(\hat{A}) = n \right)$$

Rangen til en matrise:

$Rk(A)$ = antall pivot-posisjoner i A.

Eks.

$$\begin{aligned} x + 6y - 7z + 3w &= 1 \\ x + 9y - 6z + 4w &= 2 \\ x + 3y - 8z + 4w &= 5 \end{aligned}$$

$$\hat{A} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

G.E.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

z er en fri variabel

$$\begin{aligned} 2w &= 5 & &\Rightarrow w = \tfrac{5}{2} \\ 3y + z + w &= 1 \ \ldots & &\Rightarrow y = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}z \\ x + 6y - 7z + 3w &= 1 & &\Rightarrow x = -\tfrac{7}{2} + 9z \end{aligned}$$

z fri.

$Rk(A)$ = ant. pivot pos.

n = ant. variable

$n - Rk(A)$ = ant. frihetsgrader

i eks. er ant. frihetsgrader $= 4 - 3 = 1$

> Et lineært system har en løsning hvis $Rk(A) = n$ og uendelig mange løsninger hvis $Rk(A) < n$

Finn Rk (A) og antall frihetsgrader
Rk ($\hat{A}$)

$$x + y - z = 2$$
$$2x - y + z = 3$$
$$5x + 2y - 2z = 5$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R2 := R2 - 2\cdot R1 \\ R3 := R3 - 5\cdot R1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) \quad R3 := R3 - R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Rk(A) = 2 \\ Rk(\hat{A}) = 3 \end{array}$$

$$Rk(\hat{A}) > Rk(A)$$

Da er systemet ikke konsistent
selvmotsigelse ($0 = -4$)

eks

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x + y + z &= -1 \end{aligned} \quad \cdots\cdots \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 14 \end{array}\right)$$

$Rk(A) = 3$ $\quad Rk(\hat{A}) = 3$ $\quad n = 3$ $\quad df = n - Rk(A) = 3 - 3 = 0$

Da fins en løsning.

---

eks

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 3 \end{aligned} \quad \cdots\cdots \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$Rk(A) = 2$ $\quad n = 3$ $\quad df = 3 - 2 = 1$

en fri var, uendelig mange løsn..

Det lineære underrommet generert av vektorene:

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1) Er vektorene lineært uavhengige?

2) Finn en basis for $W = \text{Span}(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3})$

$\star$ $\quad x_1 \underline{v_1} + x_2 \underline{v_2} + x_3 \cdot \underline{v_3} = \underline{0}$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R2 := R2 - 2\cdot R1 \\ R3 := R3 - 5\cdot R1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & -10 & 12 & 0 \end{array}\right) \quad R3 := R3 - 2\cdot R2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Systemet har en fri variabel.
og har uendelig mange løsninger
Da er $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ lineart avhengige.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{5}x_3 \\ \\ x_1 + 3\cdot\frac{6}{5}x_3 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{13}{5}x_3 \end{cases}$$

x_3 fri

Vi velger $x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = -13$ og $x_2 = 6$

* gir $-13\cdot\underline{v}_1 + 6\cdot\underline{v}_2 + 5\underline{v}_3 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v}_3 = \frac{13}{5}v_1 - \frac{6}{5}v_2$$

Da er $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ en basis for W.

$W = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

Resultat:

Vi har $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorer.

$W = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

1) Vi lager matrisen

$$A = (\underline{v}_1 \vdots \underline{v}_2 | \dots \vdots v_n)$$

Vi finner trappeformen til A

Hvis $Rk(A) = n \iff$ pivot i hver kolonne
Da er $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineært uavhengige

Hvis $Rk(A) < n \iff$ minst en kolonne mangler pivot.
Da er $v_1, \dots, v_n$ lineært avhengige.
Da kan alle vektorer skrives som en lineær kombinasjon av vektoren i pivot-kolonnene.
Vektorene i pivot-kolonnene er lineært uavhengige av hverandre.

Matriseregning

$m \times n$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$

$$\dim(A) = m \times n$$

Addisjon av matriser kan gjøres på matriser av samme dimensjon:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 10 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Subtraksjon

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

multiplisere med skalar:

$$3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 3 \end{pmatrix}$$

Transponert matrise:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Kvadratisk matrise:

$n = m$ $\quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

En kvatrisk matrise kalles symetrisk hvis $A = A^T$

eks. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^T$

En diagonal matrise

$a_{ij} = 0$ når $i \neq j$

eks. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Identitetsmatrise:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij} = 1$ når $i = j$

$a_{ij} = 0$ når $i \neq j$

Nullmatrise:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Regneregler:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$r(A + B) = rA + rB$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$(rA)^T = rA^T$$

Matrisemultiplikasjon

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+4\cdot 1 & 2\cdot 5+4\cdot 4 \\ 3\cdot 2+6\cdot 1 & 3\cdot 5+6\cdot 4 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 26 \\ 12 & 39 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 2 \qquad 3 \times 2$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} \longrightarrow \underset{m \times p}{AB}$$

Et lineært likningsystem kan skrives på matriseform

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

Kan skrives.

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad \text{der } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Hvis det finnes en matrise B slik at $A \cdot B = I$ kalles B den iverse matrisen til A og skrives A^{-1}.

eks. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$|A| = \det A = ad - bc$$

En matrise kalles ortogonal hvis

$$A^T = A^{-1} \implies A^T \cdot A = I$$
$$A \cdot A^T = I$$

Anta at

$$A = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v}_n \right)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \text{--}\ \underline{v}_1\ \text{--} \\ \text{--}\ \underline{v}_2\ \text{--} \\ \vdots \\ \text{--}\ \underline{v}_n\ \text{--} \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 & \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 & \cdots & \\ \vdots & \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \underline{v}_n \cdot \underline{v}_n \end{pmatrix}$$

$A^T = A^{-1}$ dersom $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

og kalles ortonormal dersom

i) $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = \cdots = \underline{v}_n \cdot \underline{v}_n = 1$

ii $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ når $i \neq j$.

$$\Updownarrow$$

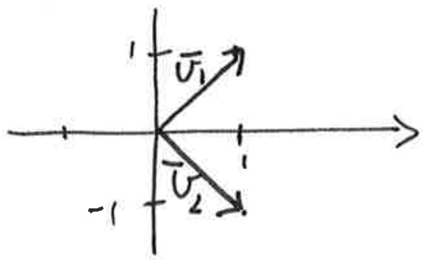
i) alle vektorene har lengde 1

ii) alle vektorene står parvis normalt på hverandre.

eks.

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Da er $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ ortogonale



$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$

$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \|\underline{v}_2\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ og $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\underline{w}_1$ og $\underline{w}_2$ er ortonormale

(lengde 1 og $\perp$ på hverandre).

Determinanter.

A $n \times n$ matrise $\det A = |A|$

eks. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kofaktorutvikling (langs 1. rad)

$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n}$

der $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ der M_{ij} er matrisen uten rad i og kolonne j.

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (18 - 12) - (9 - 4) + (\cancel{2-3}\ 3-2) = 2$$

Eks.

kvadratisk øvre triangulær

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = -6$$

$|A| = 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -6$

eks. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ R2: = R2 − R1
R3: = R3 − R1
G. E.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad R3: = R3 - 2R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Regneregler:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A^T| = |A|$$

$$|rA| = r^n \cdot |A| \text{ hvis } \dim A = n \times n$$