Sist :

- Rang til matrise

$Rk(A) = n$, $\underline{v}_1, \dots, v_n$ lin uavh.

$Rk(A) < n$, minst en kolonne mangler pivot. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lin avhengige

Vektorene i pivot-kolonnene er lin uavh. av hverandre.

Matriseregning

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} \longrightarrow \underset{m \times p}{AB}$$

Hvis $A^T = A^{-1} \Rightarrow A$ ortogonal

Hvis $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ så er $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ ortogonale

Hvis $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ og $\|\underline{v}_1\| = \|\underline{v}_2\| = 1$ så er $\underline{v}_1$ og v_2 ortonormale

Determinanter:

$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + \dots a_{1n} \cdot C_{1n}$

der $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

I dag: Inverse matriser

Egenverdier

Egenvektorer

Inverse matriser

A^{-1} er den inverse matrisen til A

$A^{-1} \cdot A = I$

$A \cdot A^{-1} = I$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} \text{ eksisterer} \iff |A| \neq 0}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Eks.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Kontroll:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

stemmer!

Inverse matrise benyttes til å løse likningssystemer. $(n \times n)$

$$
\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + \dots &+ a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{n1} x_1 + \dots &+ a_{nn} x_n = b_n
\end{aligned}
$$

på matriseform:

$$A \underline{x} = \underline{b} \quad \text{der } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Hvis $|A| \neq 0$ så finnes A^{-1} og

$$A^{-1} \cdot A \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$I \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\boxed{\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}}$$

Eks. (øvelse)

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \\
x + 2y + 4z &= 7 \\
x + 3y + 9z &= 13
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

<u>Løsning</u>

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \quad 6 \quad - 5 \quad + 1 \quad = 2$$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} +(2\cdot 9 - 4\cdot 3) & -(1\cdot 9 - 4\cdot 1) & +(1\cdot 3 - 2\cdot 1) \\ -(1\cdot 9 - 1\cdot 3) & +(1\cdot 9 - 1\cdot 1) & -(1\cdot 3 - 1\cdot 1) \\ +(1\cdot 4 - 1\cdot 2 & -(1\cdot 4 - 1\cdot 1) & +(1\cdot 2 - 1\cdot 1) \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6\cdot 3 - 6\cdot 7 + 2\cdot 13 \\ -5\cdot 3 + 8\cdot 7 - 3\cdot 13 \\ 1\cdot 3 - 2\cdot 7 + 1\cdot 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Homogene likningssystemer:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ En løsning, den trivielle $\underline{x} = \underline{0}$
Dette er eneste løsning.

$|A| = 0 \Rightarrow$ Det finnes ikke-trivielle løsninger (i tillegg til den trivielle) $Rk(A) < n$

eks. Er $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix}$
lineært uavhengige?

$\Updownarrow$ sist.

$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ Kun har triviell løsning.

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & -1 & -1\\3 & 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{— " —}$$

$\Updownarrow$

$$|A| \neq 0$$

i Eksempelet

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\2 & -1 & -1\\3 & 2 & 7\end{vmatrix} = \dots = -8$$

$\Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ er lineært uavhengige

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Hvis } \underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots, \underline{v}_n \text{ er lin. uavh.}\\ \Updownarrow \\ \left|\underline{v}_1 \;\vdots\; \underline{v}_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \underline{v}_n\right| \neq 0\end{array}}$$

Egenverdier og egenvektorer

A er en $n \times n$ matrise

$* \quad A \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$ (λ er et tall, $\underline{x}$ er en n-vektor)

λ kalles en egenverdi og $\underline{x}$ en egenvektor til A hvis λ og $\underline{x}$ er løsning i $*$, når $\underline{x} \neq \underline{0}$.

For hver egenverdi λ, kalles $\underline{x}$ (løsningen) for egenvektoren.

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \lambda \cdot I \cdot \underline{x}$$

$$A\underline{x} - \lambda I \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$$

har en løsning hvis $|A - \lambda I| \neq 0$ og uendelig mange løsninger hvis $|A - \lambda I| = 0$

Egenverdiene finnes ved å løse likningen $|A - \lambda I| = 0$.

Dette kalles den karakteristiske ligningen til A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad **$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

: abc

$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}$ eller $\underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$ egenverdiene til A.

Finner ~~[illegible]~~ egenvektorene:

$$(A - \lambda I) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se **

$$2x + 2y = 0 \quad \Rightarrow x = -y$$

y er fri

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ egenvektor for $\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ +2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$-2x + 2y = 0 \quad \Rightarrow x = y$$

y fri

egenvektor for $\lambda_2 = 3$ er $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

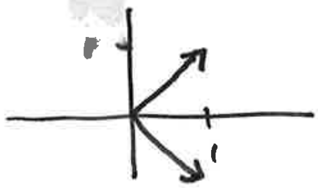
$E_{-1} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; y \text{ er ét tall} \right\}$

kalles egenrommet til $\lambda_1 = -1$

$E_3 = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = 3$

— " —



Metode:

1) Finn egenverdiene ved å løse

$|A - \lambda I| = 0$

2) Finn egenvektorene ved å løse

$(A - \lambda I) \cdot \underline{x} = \underline{0}$

for hver egenverdi.

Vi kan tenke på $A \cdot \underline{x}$ som en funksjon $T(\underline{x})$ som er en lineær transformasjon

$f(x) = 3x$ $\qquad$ $T(\underline{x}) = A\underline{x}$

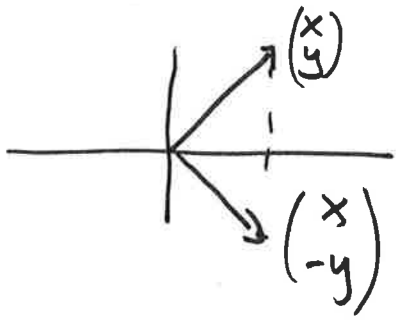
$x \xrightarrow{f} 3x$ $\qquad$ $\underset{\text{n-vektor}}{\underline{x}} \xrightarrow{T} \underset{\text{ny n-vektor}}{A\underline{x}}$

<u>Eks.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Speiling om x-aksen



Egenverdier / egenvektorer:

<u>Eks.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 - 2\lambda - 3)}_{} = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -1}_{\lambda = -1 \text{ har multiplisitet } 2.} \text{ eller } \lambda_3 = 3$$

Hvis A er en $n \times n$ matrise, så blir den karakteristiske likningen

$$(-1)^n (\lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} \cdots +) = 0$$

av grad n.

Vi har høyst n - egenverdier.

Eks. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ingen reelle egenverdier.

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}$$

Kan finne egenvektor ved Gauss-eliminasjon:

$\lambda = -1$

$$(A - \lambda I) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G. E:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R3 := R3 - R1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z fri

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 2z &= 0 \\ -3y &= 0 \\ z \text{ fri} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -z \\ y &= 0 \\ z \end{aligned} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egenvektor for $\lambda = -1$.

Hvis λ er en egenverdi med multiplisitet m, så har

* $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ mellom 1 og m frie variable.

Hvis vi løser * ved Gauss-eliminasjon vil løsningen kunne skrives:

$$\underline{x} = s_1 \cdot \underline{v}_1 + s_2 \underline{v}_2 + \dots$$

der $s_1, s_2, \dots$ er de frie variablene og $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots$ er lineært uavhengige.

<u>Eks</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \dots \quad \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{matrix}$$

$\lambda = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R3: R3-R1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y, z fri

$$2x + 7y + 2z = 0$$

$$x = -\tfrac{7}{2}y - z \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>$n=2$</u>

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Tr(A)=a+d$$

$$\det(A)=ad-bc$$

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

Karakteristisk likning:

$$\lambda^2-Tr(A)\lambda+\det(A)=0$$

Hvis A er en $n \times n$ matrise med n egenverdier $\lambda_1, \dots \lambda_n$, så er:

i) $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

ii) $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$