FORELESNING ELE 3719 9. feb. 2016 1

Sist

- Inverse matriser A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \text{ eksisterer} \iff |A| \neq 0$$

- Egenverdier og egenvektorer. $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$

Finner egenverdier ved å løse

$$|A - \lambda I| = 0$$

Finner egenvektorene for hver egenverdi ved å løse likningen

$$(A - \lambda I) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

Hvis A har n egenverdier $\lambda_1 \dots \lambda_n$ er

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_i \lambda_i$$

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i \lambda_i$$

I dag:

- Diagonalisering
- Kvadratiske former

En $n \times n$ matrise A er diagonaliserbar hvis det finnes en invertibel matrise P slik at

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

der D er diagonal.

* Hvis A har n egenverdier (talt med multiplisitet) og n lineært uavhengige egenvektorer kan vi sette:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P \left(\underline{v}_1 \middle| \underline{v}_2 \middle| \cdots \middle| \underline{v}_n \right)$$

λ_i er egenverdiene

$\underline{v}_i$ er egenvektorene.

<u>Eks</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finner egenverdiene til A:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

: abc

$$\lambda_1 = 3 \text{ og } \lambda_2 = -1$$

Finner egenvektorene til A:

$$(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0} \iff \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\underline{x}=\underline{0}$$

$\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2x+2y&=0 \quad \Rightarrow \quad x=y\\ 2x-2y&=0 \qquad\quad y \text{ fri}\end{aligned}$$

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

velger $\underline{v_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ fordi

da er $\|v_1\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2}=1$

$\lambda_2=-1$:

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cancel{x}\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$2x+2y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-y, \quad y \text{ fri}$$

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

velger $\underline{v_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

$\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$ er lineært uavhengige og er faktisk normalt på hverandre

$$\underline{v_1}\cdot\underline{v_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(1\cdot(-1)+1\cdot 1)=0$$

Da er vilkårene i * oppfylt.

Vi velger da D og P slik:
(vi lar $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Downarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vil vise at

$$P^{-1}AP = D$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D \quad \text{Stemmer!}$$

A er diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ i) A har n egenverdier
ii) — " — n lineært uavhengige egenvektorer.

der $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$

og $P = (v_1 | v_2 | \cdots v_n)$

$B = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ er en basis av n lineært uavhengige vektorer

Best hvis ~~om~~ vi kan velge B som en ortonormal mengde.

i) $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ når $i \neq j$

ii) $\|v_i\| = 1$ $\forall i$ ($\forall$ "for alle"

I så fall er $P^{-1} = P^T$

<u>Teorem</u>

$$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ er diagonaliserbar} \\ \text{med ortonormal basis } B \\ \Updownarrow \\ A \text{ er symetrisk} \end{array}}$$

Kvadratiske former

$$f(x,y) = \underbrace{3x^2+6xy-y^2}_{\substack{\text{Kvadratisk}\\\text{form}\\Q}} \underbrace{+3x-2x}_{\substack{\text{lineær}\\\text{form}\\L}} \underbrace{+y}_{\substack{\text{Konstant ledd}\\c}}$$

$$f(\underline{x}) = Q(\underline{x}) = Q(x_1, x_2 \dots, x_n)$$

$$= c_{11} \cdot x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + \quad \dots \quad + c_{nn} x_n^2$$

Q er en kvadratisk form når hvert ledd har grad 2.

Eks $f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 3y^2$

$f(x,y) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$ der

A er den symetriske matrisen til $f(x,y)$

Her er $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$ fordi

$$f(x,y) = (x \;\; y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}x + a_{21}y \quad a_{12}x + a_{22}y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x^2 + a_{21}xy + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$= a_{11}x^2 + (a_{12}+a_{21})xy + a_{22}y^2$$

$$a_{11} = 2 \qquad \underset{\frac{5}{2}}{a_{12}} + \underset{\frac{5}{2}}{a_{21}} = 5 \qquad a_{22} = 3$$

eks
$$f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 6y^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$ er den symetriske matrisen til f.

eks.
$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Klassifikasjon av kvadratiske former.

1) Q kalles positiv semidefinit hvis $Q(\underline{x}) \geq 0 \ \forall \underline{x}$
2) — " — negativ semidefinit " $Q(\underline{x}) \leq 0 \ \forall \underline{x}$
3) — " — positiv definit " $Q(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x}$
4) — " — negativ definit " $Q(\underline{x}) < 0 \ \forall \underline{x}$
5) — " — indefinit ellers.

Kvadratiske former uten kryssledd

eks: $Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$

1) Q er pos. semidef. hvis $a, b, c \geq 0$
2) " neg " " $a, b, c \leq 0$
3) " pos. definit " $a, b, c > 0$
4) " neg " " $a, b, c < 0$
5) " indefinit ellers.

Eks.

$$Q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$$

Q er positiv definit med minimum $(0,0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 4$$

Når Q ikke har kryssledd vil diagonalen til A inneholde egenverdiene.

Hvis $Q(\underline{x})$ er en kvadratisk form med symetrisk matrise A og $\lambda_1, \dots \lambda_n$ er egenverdiene til A, så er

1) $\lambda_1, \dots \lambda_n \geq 0 \Rightarrow$ Q pos semidefinit
2) $> 0 \Rightarrow$ Q pos. definit
3) $\leq 0 \Rightarrow$ Q neg semi. def.
4) $< 0 \Rightarrow$ Q neg definit
5) indefinit eller.

Hvis Q er uten kryssledd, er A diagonal.
Hva hvis vi har kryssledd?

Eks

$$Q(x,y,z) = x^2 - 6xz + 3y^2 + z^2$$

Den symmetriske matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden A har en ortonormal basis av egenvektorer, kan vi diagonalisere A. og vi kan skrive:

$$Q = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2$$

som en kvadratisk form uten kryssledd med et passende variabelbytte.

Finner først egenverdiene til A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\cancel{= (3-\lambda)(1-2\lambda+9)}$$

$$(3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 9\right) = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -2$$

Finner egenvektorene til A:

$$(A - \lambda I)\cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$\lambda = 3$: Gauss Eliminasjon

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R2 : 2R2 - 3R1$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} y \text{ fri} \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \ R3 : R3 - R1 \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z \text{ fri} \quad y = 0 \quad -3x - 3z = 0$$
$$x = -z$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} z \text{ fri} \\ y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ x = z \end{array}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kan lett vise at $B = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$ er en ortonormal basis av egenvektorer.

Nå vet vi at

i) $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$

med $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $P = \left(\underline{v}_1 \middle| \underline{v}_2 \middle| \underline{v}_3 \right)$

ii) $P^{-1} = P^T$

Nå definerer vi:

$$\underline{x} = P \cdot \underline{u}$$

$$P^{-1} \underline{x} = P^{-1} \cdot P \cdot \underline{u}$$

$$\underline{u} = P^{-1} \cdot \underline{x}$$

$$\boxed{\underline{u} = P^T \underline{x}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ som gir

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$u_1 = x_2$, $u_2 = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}}$, $u_3 = \frac{x_3 + x_1}{\sqrt{2}}$

Da har vi:

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$$

$$(P\underline{u})^T \cdot A \cdot (P \cdot \underline{u})$$

$$= \underline{u}^T \cdot P^T \cdot A \cdot P \cdot \underline{u}$$

$$= \underline{u}^T (P^{-1} A P) \cdot \underline{u}$$

$$= \underline{u}^T \cdot D \, \underline{u}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= 3u_1^2 + 4u_2^2 - 2u_3^2$$

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 < 0$

Q er indefinit