Sist :

A diagonaliserbar hvis det fins en inverterbar matrise P slik at $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ der d er diagonal.

A matrise med n egenverdier og n egenvektorer :

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ der $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ er egenverdiene

$P = (\underline{v_1} | \cdots | \underline{v_n})$ der $\underline{v_1} \ldots \underline{v_n}$ er egenvektorene

Den symetriske matrisen A til en kvadratisk form er diagonaliserbar.

Q kvadratisk form $\Rightarrow$ pos. def hvis $\lambda_1 \ldots \lambda_n > 0$

⋮

osv.

Eks

$$Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$$

Den symmetriske matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene til A:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda) \cdot \lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$$

Da er $Q(\underline{x})$ positiv semidefinit.
(eller A)

Derivasjon av annengradsfunksjoner

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ \cancel{+a_{12}x_1x_2+} \cdots \\ + a_{12}x_1x_2 \end{array}\right\} Q(\underline{x})$$

$$+ b_1x_1 + \cdots + b_nx_n \qquad L(\underline{x})$$

$$+ c$$

$$= \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + c$$

A er den symetrisk matrisen til Q

og

$$B = (b_1 \; \cdots \; b_n)$$

For den kvadratiske formen:

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Eks. $Q(\underline{x}) = ax^2 + bxy + cy^2$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax + by \\ bx + 2cy \end{pmatrix}$$

For den lineære formen

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = B^T$$

For annengradsfunksjonen:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T}$$

Øvelse

Finn $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$ når

$$f(\underline{x}) = f(x,y) = \underbrace{2x^2+3xy-y^2}_{Q} + \underbrace{4x-y}_{L} + 7$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = 7$$

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T = 2\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4x+3y+4 \\ 3x-2y-1 \end{pmatrix}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 2A\underline{x} + B^T$$

i) A pos (semi)definit $\Leftrightarrow$ f konveks
da er stasj. punkter
minimumspunkter

ii) A neg. (semi)definit $\Leftrightarrow$ f konkav
da er stasjonære punkter
maksimumspunkter.

iii) A indefinit
Da er stasjonære punkter
sadelpunkter.

Stasjonære punkter

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = 0$$

$$2A\underline{x} + B^T = 0$$

$$A\underline{x} = -\frac{1}{2}B^T$$

Vi har to muligheter:

1) $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ eksisterer

$$A^{-1} \cdot A\underline{x} = -\frac{1}{2}A^{-1} \cdot B^T$$

$$\boxed{\underline{x} = -\frac{1}{2}A^{-1} \cdot B^T}$$

2) $|A| = 0 \Rightarrow$ ingen eller uendelig mange stasjonære punkter.

<u>Eks.</u>

$f(x,y,z) = 2xy - z^2$

$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ der $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ og $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Avgjør definithet ved å finne egenverdiene:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$

Både pos. og neg. egenverdier

$\Rightarrow A$ er indefinit

Stasjonært punkt:

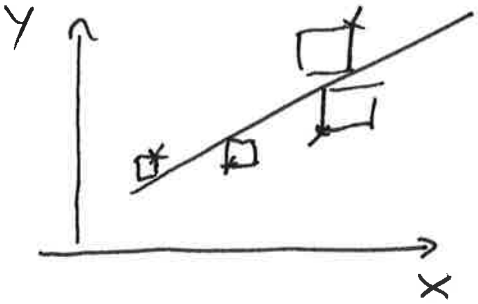
$$\lambda A \underline{x} = \underline{0}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 0, \; y = 0, \; z = 0$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ er et sadelpunkt.

Linear regresjon



$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X + e_i$$

Minste kvadraters estimerer α og β slik at $\sum e_i^2$ er minst mulig.

y er avhengig variabel med $x_1 \cdots x_n$ som uavhengige variable

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n \cdot x_n + \varepsilon$$

Datasett :

Y	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	x_{11}		$\cdot \quad \cdot$	x_{1n}
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
y_N	x_{N1}			x_{Nn}

$$* \begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \cdots + \beta_n \cdot x_{1n} + \varepsilon_1 \\ \quad \vdots \\ y_N = \beta_0 + \beta_1 x_{N1} + \cdots + \beta_n x_{Nn} + \varepsilon_N \end{cases}$$

Vi ønsker å estimer $\beta_0, \cdots, \beta_n$ slik at $\sum \varepsilon_i^2$ er minst.

* på matriseform:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \underline{Y} - X\underline{\beta}$$

der $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{Nn} \end{pmatrix}$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

Vi vil minimere:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots \varepsilon_N^2 = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon}$$

$$= (\underline{Y} - X\underline{\beta})^T (\underline{Y} - X\underline{\beta})$$

$$= (\underline{Y}^T - \underline{\beta}^T X^T)(\underline{Y} - X\underline{\beta})$$

$$= \underline{Y}^T \cdot \underline{Y} - (\underline{\beta}^T X^T \underline{Y})^T - \underline{Y}^T X\underline{\beta} + \underline{\beta}^T X^T X \underline{\beta}$$

$$= \underline{\beta}^T (X^T X)\underline{\beta} - 2\underline{Y}^T X\underline{\beta} + \underline{Y}^T \cdot \underline{Y}$$

(Som er en kvadratisk form på formen $\underline{x}^T A \underline{x} + B\underline{x} + C$ der $A = X^T X$ og $B = 2\underline{Y}^T X$)

Deriverer

$$2X^T X \cdot \underline{\beta} - (2\underline{Y}^T X)^T = 0$$

$$2X^T X \underline{\beta} - 2X^T \underline{Y} = 0$$

$$(X^T X)\underline{\beta} = X^T \underline{Y}$$

$$\boxed{\underline{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y}}$$

Som er min. fordi $X^T X^{-1}$ er pos. def.

$$\underline{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y}$$

<u>eks</u>

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

estimer α, β_1 og β_2, dvs. $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

Y	X_1	X_2
6	4	10
4	3	9
7	4	11
5	4	10
8	5	15

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 11 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 20 & 55 \\ 20 & 82 & 226 \\ 55 & 226 & 627 \end{pmatrix}^{-1} = \cdots^{*} = \boxed{\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 169 & -55 & 5 \\ -55 & 55 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix}}$$

* se neste side

$$X^T \cdot \underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 11 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 30 \\ 124 \\ 343 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\beta} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 169 & -55 & 5 \\ -55 & 55 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 124 \\ 343 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -35 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1,75 \\ 1,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\hat{Y} = -1,75 + 1,25 X_1 + 0,25 X_2}}$$

Utregning av A^{-1} i forrige eks.: 10x

~~Utregn av A-1~~

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 55 \\ 20 & 82 & 226 \\ 55 & 226 & 627 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 20 & 55 \\ 20 & 82 & 226 \\ 55 & 226 & 627 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

der $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{pmatrix}^T$

finner $|A|$

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 82 & 226 \\ 226 & 627 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 20 & 226 \\ 55 & 627 \end{vmatrix} + 55 \begin{vmatrix} 20 & 82 \\ 55 & 226 \end{vmatrix}$$

$$= 5(82 \cdot 627 - 226^2) - 20(20 \cdot 627 - 226 \cdot 55) + 55 \cdot (20 \cdot 226 - 82 \cdot 55)$$

$$= 1690 \quad - 2200 + 550 = 40$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 338 & -110 & 10 \\ -110 & 110 & -30 \\ 10 & -30 & 10 \end{pmatrix}^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 169 & -55 & 5 \\ -55 & 55 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{40} \cdot 2 \begin{pmatrix} 169 & -55 & 5 \\ -55 & 55 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 169 & -55 & 5 \\ -55 & 55 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>øvelse</u>

X	Y
1	-1
2	0
3	4

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

estimer $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y}$$

$$(X^T X)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \cancel{\tfrac{1}{6}}\, 14 = \left| \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\beta} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -24 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y} = \underline{\underline{-4 + 2.5x}}$$