KAP 1

Stikkord:

- Sannsynlighet som andel når utfallene er like sannsynlige.

Eks. Terningkast

$$P(\text{partall}) = \frac{3}{6}$$

Notasjon:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$ utfallsrom

$$A = \{2,4,6\}$$ partall

$$|\Omega| = 6$$

$$|A| = 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$\Omega = \{x : 1 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{N}\}$$

A^c komplementærmengde.

KAP 2

Stokastisk forsøk - prosess der de mulige utfallene er kjent, men faktisk utfall er ukjent.

Utfallsrom - mengden av alle mulige utfall
eks. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Hendelse - Delmengde av utfallsrommet.
eks $A = \{2, 4, 6\}$

Sannsynlighetsmål - En funksjon
$P \longrightarrow \mathbb{R}$
eks. $P(A) = \frac{1}{2}$
P er definert på en hendelse E der:

i) $0 \leq P(E) \leq 1$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $P(E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n)$
$= P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$

hvis $E_1, \ldots, E_n$ er parvis disjunkte.
$\therefore\ E_i \cap E_j = \emptyset$ når $i \neq j$

Eks. på sannsynlighetsmål

$\Omega = \{1,2,3,4,5\}$

$P(1) = \frac{1}{10}$, $P(2) = \frac{2}{10}$, $P(3) = \frac{3}{10}$, $P(4) = \frac{3}{10}$, $P(5) = \frac{1}{10}$

oppfyller i, ii og iii.

Regler: $\boxed{P(E^c) = 1 - P(E)}$

Bevis: $\Omega \overset{*}{=} E \cup E^c$

$P(\Omega) = 1$ i)

$P(\Omega) = P(E \cup E^c) \underset{\ast}{=} \underbrace{P(E) + P(E^c) = 1}_{iii}$

$P(E^c) = 1 - P(E)$

For alle hendelser E_1 og E_2 gjelder:

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

Hvis E_1 og E_2 er disjunkte er

$P(E_1 \cap E_2) = 0$ og

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)}$$

Hvis $E = \{S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n\}$

$P(E) = P(S_1) + \dots + P(S_n)$

Eks. 1

Vi kaster to terninger

E er hendelsen at summen er 6

$P(E) = ?$

Eks. 2

Vi kaster en mynt til vi får "kron"

Hva er sanns. for at vi må kaste akkurat 3 ganger.

X = ant. kast til "kron"

$P(X=3) = ?$

Hvorfor er P et sannsynlighetsmål?

Løsning 1

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots\ldots, (6,6)\}$$

$$|\Omega| = 36$$

$$E = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$|E| = 5$$

$$P(E) = \underline{\underline{\frac{5}{36}}}$$

Løsning 2

$$\Omega = \{K, MK, MMK, MMMK, \ldots\}$$

Ω har uendelig mange utfall

$$P(X=1) = P(K) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(MK) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = P(MMK) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

P er et sanns. mål fordi:

i) $0 \leq P(x) \leq 1$

ii) $P(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$

iii) opplagt.

Uavhengige hendelser

To hendelser E_1 og E_2 kalles <u>uavhengige</u> hvis

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

<u>Eks.</u> E_1 = mynt i 1. kast

E_2 = kron i 2. kast

$$\Omega = \{M \cap M, \underline{M \cap K}, K \cap M, K \cap K\}$$

$$P(M \cap K) = \frac{1}{4} = P(E_1 \cap E_2)$$

$$P(M) = P(E_1) = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(K) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

E_1 og E_2 er uavhengige.

<u>Eks.</u> Vi kaster en terning 2 ganger

E_1: Vi får 3'er i første kast

E_2: Summen av de to kastene er 6.

Er E_1 og E_2 uavhengige?

<u>Løsning:</u> utfallsrom: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$ $|\Omega| = 36$

$E_1 \cap E_2 = \{(3,3)\}$, $\begin{cases} E_1 = \{(3,1), (3,2), \ldots, (3,6)\} & |E_1| = 6 \\ E_2 = \{(1,5), (2,4), \ldots, (5,1)\} & |E_2| = 5 \end{cases}$

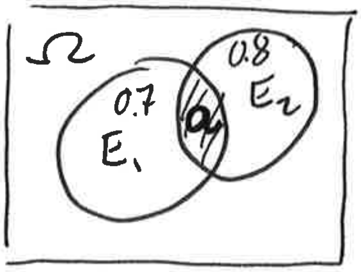
$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36} = \frac{6}{216}$

E_1 og E_2 er ~~ikke~~ avhengige.

Eks

La E_1 og E_2 være to hendelser slik at $P(E_1) = 0.7$ og $P(E_2) = 0.8$

Hva er mulige verdier for $P(E_1 \cap E_2)$?



$a = P(E_1 \cap E_2)$

a kan høyst være 0.7

$$P(E_1 \cup E_2) = \boxed{P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \leq 1} \; *$$

$$0{,}7 + 0{,}8 - a \leq 1$$

$$1{,}5 - a \leq 1$$

$$-a \leq -0{,}5$$

$$a \geq 0{,}5$$

$$0{,}5 \leq a \leq 0{,}7$$

$*$ gir:

$$-P(E_1 \cap E_2) \leq -P(E_1) - P(E_2) + 1$$

Bonferronis ulikhet

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1}$$

$$\boxed{P(E_1) + P(E_2) - 1 \leq P(E_1 \cap E_2) \leq \min\left(P(E_1), P(E_2)\right)}$$

Betinget sannsynlighet

$$\boxed{P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}}$$

Eks.
to terninger

E_1 : 3 på første
E_2 : sum = 6

$P(E_1|E_2) = ?$ $\quad P(E_2|E_1) = ?$

Løsning:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_1 \text{ og } E_2 \text{ er uavhengige} \\ \Longleftrightarrow \quad P(E_1|E_2) = P(E_1) \end{array}}$$

Bevis:

$\Rightarrow$ Anta E_1 og E_2 uavhengige $\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

$$\Rightarrow P(E_1) = P(E_1|E_2)$$

$\Leftarrow$ Anta at $P(E_1) = P(E_1|E_2)$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

$$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Da er A og B uavhengige

Bayes setning

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2)}{P(E_1)}$$

med partisjon i nevner:

$$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2^c)$$
$$= P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2) + P(E_1 | E_2^c) \cdot P(E_2^c)$$

Eks. Diagnostisk test for en sykdom.

Hendelser:

T : positivt utslag på test

S : personen har sykdommen

Anta at vi vet at:

$P(S) = 0.005$ $\quad (P(S^c) = 0.995)$

$P(T|S) = 0.95$

$P(T|S^c) = 0.01$

Testen viste positivt utslag.
Hva er sanns. for at personen har sykdommen?

$$P(S|T) = \frac{P(T|S) \cdot P(S)}{P(T)} = \frac{P(T|S) \cdot P(S)}{P(T|S) \cdot P(S) + P(T|S^c) P(S^c)}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995}$$

$$= \underline{\underline{0.32}}$$

Bayes setning med utvidet partisjon

Hendelser:

$$E$$

$$S = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$$

$$P(F_i|E) = \frac{P(E|F_i)\cdot P(F_i)}{P(E|F_1)\cdot P(F_1) + \cdots + P(E|F_n)\cdot P(F_n)}$$

Eks

Tre fanger, A, B, C. En skal henrettes og to skal settes fri. Fangevokter vet hvem som skal henrettes. Fangevokter forteller A om en av de to andre som skal frigis. Endrer det sanns. for at A henrettes?

Plan å henrette		Fangevokter sier	
A	(Ah)	B eller C	
B		C	
C		B	(sB)

Hva blir $P(Ah \mid sB)$?

Bayes setning:

$$P(Ah \mid sB) = \frac{P(Ah \cap sB)}{P(sB)} = \frac{P(sB \cap Ah)}{P(sB)}$$

$$= \frac{P(sB \mid Ah) \cdot P(Ah)}{P(sB \mid Ah) \cdot P(Ah) + P(sB \mid Bh) \cdot P(Bh) + P(sB \mid Ch) P(Ch)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{2}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$