	Plan
1	Andre ordens lineære differensiallikninger
2	Superposisjonsprinsippet og homogen løsning

Kontor: B3y – 085

① Andre ordens diff. likninger

$$y'' = F(t, y, y')$$

Generell løsning av en andre ordens diff. likn. avhenger av to ubestemte konstanter

Ex: $y'' = 3t + 6 \quad | \int \dots dt$

$$y' = \int 3t + 6 \, dt = \frac{3}{2}t^2 + 6t + C \quad | \int \dots dt$$

$$y = \int \frac{3}{2}t^2 + 6t + C \, dt$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}t^3 + 6 \cdot \frac{1}{2}t^2 + Ct + D$$

$$y = \frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + Ct + D \qquad \text{generell løsning}$$

Startverdi-problem: $y'' = 3t + 6, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$

$$y = \frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + Ct + D \qquad y' = \frac{3}{2}t^2 + 6t + C$$

$y(0) = 1: \; D = 1$

$y'(0) = 2: \; C = 2$

Partikulær løsning:

$$y = \frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 2t + 1$$

Andreordens lineære diff.likninger:

Defn: En andre ordens diff.likn. er lineær hvis den kan skrives på formen

$$y'' + a(t)y' + b(t)\cdot y = h(t)$$

Den kalles homogen hvis $h(t)=0$ (inhomogen ellers)

Den har konstante koeff. hvis $a(t)=a$ og $b(t)=b$ er konstanter.

Ex:

$$y'' - 2y' - 3y = 12 \qquad y'' - ty' + t^2 y = e^t$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$3y'' - 6y' + 10y = t$$

Resultat: Vi kan bruke superposisjonsprinsippet for alle andre ordens lineære diff. likn:

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

(2) Homogen løsning:

Anta at $y'' + ay' + by = 0$ er homogen med konstante koeff.
Da kan vi bruke karakteristisk likning.

Ex: $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' \longrightarrow r^2 \\ y' \longrightarrow r \\ y \longmapsto 1 \end{array} \right\}$$

Kar. likn: $r^2 - 2r - 3 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + (-2) \cdot \frac{d}{dt} + (-3)$$

linear operator

$D(y) = 0$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$\underline{r = -1}$ eller $\underline{r = 3}$

$\Downarrow$

$$D(c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2)$$
$$= D(c_1 y_1) + D(c_2 y_2)$$
$$= c_1 \cdot D(y_1) + c_2 \cdot D(y_2)$$

$$y = C_1 \cdot e^{-1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{3t}$$

"homogen linear diff. likn. $\Rightarrow$ linear komb. av løsn. blir løsn"

$$y = \underline{\underline{C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}}}$$ generell løsn.

Hvorfor?

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \qquad y = \underline{e^{rt}}$$

$$(r^2 e^{rt}) - 2(r e^{rt}) - 3(e^{rt}) = 0 \qquad y' = e^{rt} \cdot r = \underline{r \cdot e^{rt}}$$

$$e^{rt} \cdot (r^2 - 2r - 3) = 0 \quad | : e^{rt} \qquad y'' = (e^{rt} \cdot r) \cdot r = \underline{r^2 e^{rt}}$$

$\underline{r^2 - 2r - 3 = 0} \leftarrow$ Karakteristisk likn.

Dvs: $y = e^{rt}$ er en løsn. av diff. likn. $\Leftrightarrow$ r er en løsn. av kar. likn.

Ex: $3y'' - 2y' + y = 0 \quad |:3$ → Kar. likn.: $3r^2 - 2r + 1 = 0$

$r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3} = 0$

$y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}y = 0$

Samme løsn.

Kar. likn.: $r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3} = 0$

$$r = \frac{2/3 \pm \sqrt{4/9 - 4/3}}{2}$$

$\frac{4}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{8}{9} < 0$

ingen løsn.

Ex: $y'' - 5y' + 6y = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$\underline{r=2}$ eller $\underline{r=3}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}}}$ generell løsn.

Generelt: $y'' + ay' + by = 0$ (a, b konst.)

Kar. likn.: $r^2 + ar + b = 0$

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

1. $\underline{a^2 - 4b > 0}$: $r_1 \neq r_2$ (to reelle)
2. $\underline{a^2 - 4b = 0}$: $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$ (dobbelrot)
3. $\underline{a^2 - 4b < 0}$: ingen løsn. for r (blant reelle tall)

Konkl:

1. Generell løsn: $y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}$
2. Generell løsn: $y = C_1 e^{rt} + C_2 \cdot t e^{rt}$
3. Finnes også løsn (ikke pensum)

Ex: $y'' - 2y' + y = 0$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$(r-1)^2 = 0$$
$$\underline{r_1 = r_2 = 1} \qquad y = C_1 e^t + C_2 e^t = \underline{D \cdot e^t}$$
$$(D = C_1 + C_2)$$

går ikke

① $y = e^t$ er en løsn.

② Må finne en annen løsn!

$$y = u \cdot e^{rt}, \quad \text{der } u = u(t)$$
$$y' = u' \cdot e^{rt} + u \cdot e^{rt} \cdot r = \underline{(u' + ru)e^{rt}}$$
$$y'' = (u'' + ru')e^{rt} + (u' + ru) \cdot e^{rt} \cdot r = \underline{(u'' + 2ru' + r^2 u)e^{rt}}$$

$$(u'' + 2ru' + r^2 u)e^{rt} - 2(u' + ru)e^{rt} + (ue^{rt}) = 0$$
$$(u'' + 2ru' + r^2 u - 2u' - 2ru + u)\, e^{rt} = 0 \quad | : e^{rt}$$

$$(\underbrace{u'' + 2ru' - 2u'}_{2(r-1)u' = 0}) + \underbrace{u(r^2 - 2r + 1)}_{u \cdot 0} = 0 \qquad \Rightarrow u'' = 0$$

$r = 1$

$\Rightarrow$ Hvis $u = Ct + D$ er lineær og $r = 1$, så får vi løsn. $y = (Ct + D) \cdot e^{1 \cdot t} = \underline{C \cdot te^t + De^t}$

Generell løsn: $y = \underline{\underline{C_1 e^t + C_2 \cdot te^t}}$

Det inhomogene tilfellet: $y'' + ay' + by = h(t)$

Ex: $y'' - 5y' - 6y = 3$

Superpos: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 e^{6t} - 1/2$

y_h: $y'' - 5y' - 6y = 0$ (alle løsn. av den homogene likn.)

$r^2 - 5r - 6 = 0$

$r = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = -1, 6 \Rightarrow y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{6t}$

y_p: $y'' - 5y' - 6y = 3 \leftarrow$ konst. Prøver: $y = A$ (konst.)

$y' = 0$

$y'' = 0$

$\cancel{0 - 5 \cdot 0} - 6 \cdot A = 3$

$A = \frac{3}{-6} = -1/2$

$y_p = -1/2$

Eks: Et eksempel på ikke-konstante koeff.: Euler-likninger

$$t^2y'' - 2ty' - 3y = 0 \qquad t^2y'' + aty' + by = 0$$

$y = t^r$:

$y' = rt^{r-1}$

$y'' = r(r-1)t^{r-2}$

$$t^2 \cdot r(r-1)t^{r-2} - 2t \cdot rt^{r-1} - 3t^r = 0$$

$$r(r-1)t^r - 2rt^r - 3t^r = 0$$

$$t^r\left(r(r-1) - 2r - 3\right) = 0$$

$$r^2 - 3r - 3 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$r_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \qquad r_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

⇓

$$y = C_1 t^{r_1} + C_2 \cdot t^{r_2}$$