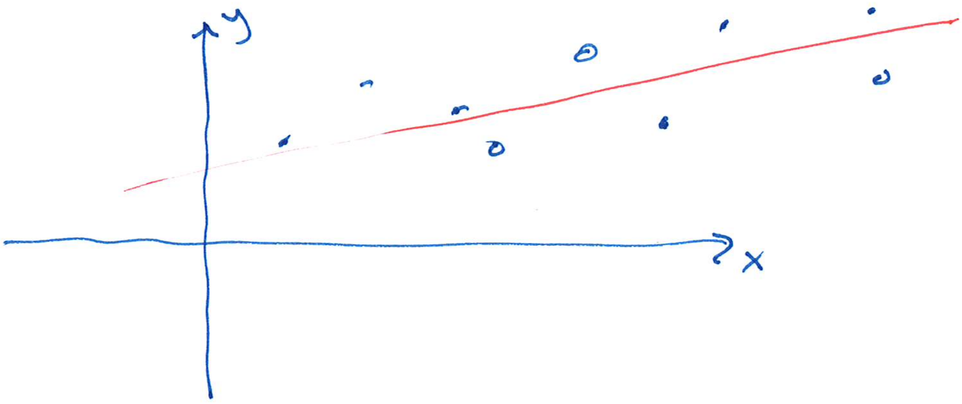
Plan

1 Korrelasjonskoeffisienten
2 Lineære system og Gauss-eliminasjon

1 Korrelasjonskoeffisient

Gitt datapkt $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$



i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
1	x_1	y_1	$x_1 - \bar{x}$	$y_1 - \bar{y}$
2	x_2	y_2	$x_2 - \bar{x}$	$y_2 - \bar{y}$
3	x_3	y_3	$x_3 - \bar{x}$	$y_3 - \bar{y}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	x_N	y_N	$x_N - \bar{x}$	$y_N - \bar{y}$

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$

$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_i$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_N - \bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_N - \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} = r = \cos(\angle(\underline{u}, \underline{v}))$$

② Lineære likningssystem

Eks:
$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z + 6w &= 8 \\ 3x - 11y + 7z + 2w &= 7 \\ x - 2y + z + 10w &= 5 \end{aligned}$$

3×4 lineært system (3 likninger, 4 ukjente)

alle likn. er lineære

{ std. form
{ vektorlikning

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v_4} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x\,\underline{v_1} + y\,\underline{v_2} + z\,\underline{v_3} + w \cdot \underline{v_4} = \underline{w}}$$ vektorlikning

Metode for å løse lineære system: Gauss-eliminasjon

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & -11 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 5 \end{array}\right) \; -1$$

utvidet matrise

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -11 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 5 \end{array}\right) \; -3 \;\; -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 2 \end{array}\right) \; -2$$

$$\downarrow$$

Elementære radoperasj.:
i) Bytte om to rader
ii) Gange en rad med et tall $c \neq 0$
iii) Legge til et multippel av en rad til en annen rad

Bevarer løsningene

Pivot: første tall ulik null i en rad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & 6 \end{array}\right)$$

trappeform

Trappeform:

- alle nullrader er nederst i matrisen
- alle pivoter står lengre til venstre enn pivoten i radene nedenfor

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z - 4w &= 3 \\ y - 2z + 14w &= -2 \\ 2z - 14w &= 6 \end{aligned}$$

Baklengs substitusjon

$$2z - 14w = 6$$
$$2z = 14w + 6$$
$$z = 7w + 3$$

$$y - 2(7w+3) + 14w = -2$$
$$y \cancel{-14w} - 6 \cancel{+14w} = -2$$
$$y = 4$$

$$x - 4\cdot(4) + 3(7w+3) - 4w = 3$$
$$x - 16 + 21w + 9 - 4w = 3$$
$$x = -17w + 10$$

Se på pivotposisjonene:

variabler uten pivotposisjon: fri variabel ~~x,y,z~~ (w)

— " — med — " — : avhengig variabel (x,y,z)

→ x,y,z kan uttrykkes vha w

Resultat: Ethvert lineært system har enten

i) ingen løsninger $\longleftrightarrow$ pivotpos. i siste kolonne

ii) nøyaktig én løsning

iii) uendelig mange løsninger

} Ikke pivotpos. i siste kolonne

(ii) én løsn. $\Leftrightarrow$ ingen frie var.

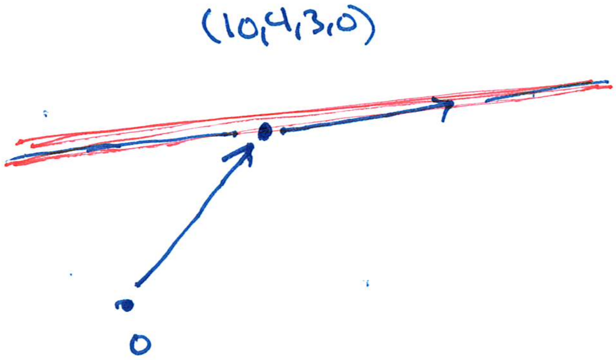
(iii) uendelig mange løsn $\Leftrightarrow$ minst én fri variabel

Eks: (fortsatt)

$$\left.\begin{aligned} x &= -17w + 10 \\ y &= 4 \\ z &= 7w + 3 \\ w &: \text{fri} \\ &= t \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17t + 10 \\ 4 \\ 7t + 3 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Løsningene danner en linje i et 4-dim. koordinatsystem

Tolkning: vektorlikning

$x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\cdot\underline{v_3} + w\cdot\underline{v_4} = \underline{w}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

løsningene til det lin. systemet = løsningene til vektorlikningen

$t=0$: $10\underline{v_1} + 4\underline{v_2} + 3\underline{v_3} + 0\cdot\underline{v_4} = \underline{w}$

$t=1$: $-7\underline{v_1} + 4\underline{v_2} + 10\underline{v_3} + 1\cdot\underline{v_4} = \underline{w}$

$17\underline{v_1} \qquad - 7\underline{v_3} - \underline{v_4} = \underline{0}$

$\downarrow$

Tolkningen:

① $\underline{w}$ kan skrives som en linearkomb. av vektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}$

$\Updownarrow$

vi har løsninger

② $\underline{w}$ kan skrives som en linearkomb av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}$ på mer enn én måte

$\Updownarrow$

vi har uendelig mange løsninger

Eks: Er $\begin{pmatrix}12\\5\\-2\end{pmatrix}$ en lineærkomb. av $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$?

Svar:
$$x\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-4\\-5\\7\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\5\\-2\end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}2x-4y+2z&=12\\3x-5y-2z&=5\\-4x+7y+4z&=-2\end{aligned}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&2&12\\3&-5&-2&5\\-4&7&4&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ ]\,-1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&4&7\\3&-5&-2&5\\-4&7&4&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}]\,3\\ \\ ]\,-4\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&4&7\\0&-2&10&26\\0&3&-12&-30\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ ]\,1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&4&7\\0&1&-2&-4\\0&3&-12&-30\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ ]\,-3\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&4&7\\0&1&-2&-4\\0&0&-6&-18\end{array}\right)$$

trappeform

én løsning

Ja

Mulig på én måte

$$\begin{aligned}-x+y+4z&=7\\y-2z&=-4\\-6z&=-18\end{aligned}\qquad\left.\begin{aligned}x&=7\\y&=2\\z&=3\end{aligned}\right\}\quad\begin{pmatrix}12\\5\\-2\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-4\\-5\\7\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Rangen til en matrise.

Rangen til A: rk(A)

$$\underset{\substack{m\times n\\ \text{matrise}}}{A} \to \underset{\substack{\text{elementære}\\ \text{radoperasjoner}}}{\cdots\cdots} \to T \leftarrow \text{trappe-form}$$

rk A = antall pivoter i T

= antall pivot-posisjoner

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} m$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{rk}\, A = \underline{\underline{3}}$$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 12 \\ 3 & -5 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\text{rk}\,(A|\underline{b}) = \underline{\underline{3}}$$