Plan
1 Determinanter
2 Inverse matriser

1 Determinanter

$$A \rightsquigarrow \det(A) = |A|$$

$n \times n$ matrise → et tall

Eks: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \underline{ad - bc}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 4\cdot 2 = \underline{\underline{-9}}$$

Defn + Metode: Kofaktorutvikling

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot C_{11} + 2\cdot C_{12} + 7\cdot C_{13}$$

$$= +1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-12) - 2(4) + 7(5) = \underline{\underline{15}}$$

Kofaktorutvikling langs faste rad:

C_{ij} : kofaktor i posisjon (i,j)

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Fortegn: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

M_{ij} = determinanten vi får ved å slette rad i, kolonne j fra A

minor

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/ELE3719/

Merk: ① Kofaktorutvikling langs en hvilken som helst rad eller kolonne gir $|A|$.

② Determinanten til en diagonal matrise eller en øvre triangulær matrise, er produktet av tallene på diagonalen.

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{15}$$

øvre triangulær

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 71 \\ 0 & 3 & 83 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 71 \\ 0 & 3 & 83 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 83 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{15}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-1) = \underline{\underline{-6}}$$

Resultat:

Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon, så er:

i) Hvis vi legger til et multippel av en rad til en annen rad, $|B| = |A|$

ii) Hvis vi bytter om to rader, $|B| = -|A|$

iii) Hvis vi multipliserer en rad med $c \neq 0$, $|B| = c \cdot |A|$

Metoder for å finne $|A|$: – kofaktorutvikling
– Gauss

Egenskaper til determinanten:

i) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

ii) $|c \cdot A| = c^n \cdot |A|$ hvis A er $n \times n$-matrise

iii) $|A^T| = |A|$

$$2 \cdot \underset{\overset{\|}{2^{-1}}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$2x = 4 \qquad \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x = \tfrac{1}{2} \cdot 4$$

2 Inverse matriser

A $n \times n$-matrise

Def.: En matrise B er en invers til A hvis $A \cdot B = I$ og $B \cdot A = I$

og skrives A^{-1}

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Resultat: i) Hvis } A \text{ har en invers, så er den entydig.} \\ \text{ii) } A \text{ har en invers} \Leftrightarrow m = n \text{ og } |A| \neq 0\end{array}}$$

Anta $A \cdot B_1 = I$, $B_1 \cdot A = I$ og $A \cdot B_2 = I$, $B_2 \cdot A = I$. Da har vi: $B_1 A \cdot B_2$

$$B_1 (A B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2$$

$$B_1 \cdot I = I \cdot B_2$$

$$B_1 = B_2$$

Hvordan finne A^{-1}:

A^{-1} = den inverse matrisen til A
A invertibel: A^{-1} eksisterer $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

n=2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

~~tadotel~~ $|A| = ad - bc = 0$: A^{-1} fins ikke

$|A| = ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: $|A| = 0$ A^{-1} fins ikke

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{-11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eks: $x + 2y = 8$
$\cancel{7x} + 3y = 15$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Lin. syst. på matriseform: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ $\quad | A^{-1} \cdot$

$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$I \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 41/11 \end{pmatrix}$

Eks:
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

diagonal

$|D| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \neq 0$

invertibel

Generell metode for å finne A^{-1}:

$\underset{n \times n}{A}$ slik at $|A| \neq 0$: $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^T$

Eks:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \cdot (6) - 1(5) + 1(1) = 2 \neq 0$$

A er invertibel

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = I$$

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2I = |A| \cdot I$$

$$1 \cdot (-6) + 1 \cdot 8 + 1 \cdot (-2)$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Sammenhengen mellom <u>determinant</u> og antall løsninger i et <u>lineært system</u>

<u>Lineært system på matriseform</u> $\rightsquigarrow$ <u>Se på $|A|$</u>:

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$m \times n$-system $\Leftrightarrow$ A $m \times n$ matrise

$\boxed{\text{Anta at } m = n}$

- $|A| \neq 0$: én løsning (ingen frie)
- $|A| = 0$: ingen løsn. eller uendelig mange løsn.

<u>Homogent system</u>: $A\underline{x} = \underline{0}$

- $|A| \neq 0$: én løsn.
- $|A| = 0$: uendelig mange løsn.

③ <u>Ortogonale matriser</u>

<u>Defn</u>: En $n \times n$-matrise A kalles <u>ortogonal</u> hvis $A^{-1} = A^T$.

<u>Merk</u>: $A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A^T \cdot A = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \hline \underline{v_2} \\ \hline \vdots \\ \underline{v_n} \end{pmatrix} \cdot \left(\underline{v_1} \middle| \underline{v_2} \middle| \cdots \middle| \underline{v_n} \right) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

$A = \left(\underline{v_1} \middle| \underline{v_2} \middle| \cdots \middle| \underline{v_n} \right)$

Resultat: $A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \cdots | \underline{v}_n)$ er ortogonal

$$\Updownarrow$$

i) $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = \cdots = \underline{v}_n \cdot \underline{v}_n = 1$

ii) $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ for $i \neq j$

Defn.: $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ kalles en <u>ortogonal mengde</u> hvis krav ii) holder, og en <u>ortonormal</u> mengde hvis krav i) og ii) holder.

$$\underline{u}_i \cdot \underline{u}_i = 1 \iff \|u_i\| = 1$$