Prøveeksamen	Eksamensrelevante oppgaver i ELE 3719 Matematikk Vektorer, matriser og lineær algebra
Dato	Februar 2015 (sist oppdatert 04/02/2015)

Oppgave 1.

Vi betrakter profittfunksjonen $\pi(x,y) = -240 + 20x + 25y - 3x^2 + 10xy - 9y^2$. For enkelhets skyld antar vi at π er definert for alle par (x,y) av reelle tall.

(A) Når vi skriver $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ på vektorform, kan vi skrive funksjonen π på matriseform som
$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$$
hvor A er en symmetrisk matrise, B er en radvektor og C er en konstant. Finn A, B og C. Regn også ut vektoren
$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \pi'_x \\ \pi'_y \end{pmatrix}$$

(B) Finn egenverdiene til A. Avgjør om A er positiv semidefinit, negativ semidefinit eller indefinit.

(C) Vis at π har et entydig maksimumspunkt, og finn den tilhørende maksimumsverdien.

Oppgave 2.

Vi betrakter matrisen A gitt ved
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(A) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi for A. Finn de andre egenverdiene til A.

(B) Finn alle egenvektorer for A med egenverdi $\lambda = 3$.

(C) Vis at dersom $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ er egenvektorer for A med forskjellige egenverdier, så er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

Oppgave 3.

Vi betrakter vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og matrisen T gitt ved
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

(A) For hvilke verdier av h er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige?

(B) Er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige når $h = 2$?

Oppgave 4.

Vi betrakter matrisen A gitt ved
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(A) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi for A, og finn alle egenvektorer for A med egenverdi $\lambda = 3$.

(B) Regn ut den symmetriske matrisen $B = A^T A$. Vis at B er invertibel, og regn ut B^{-1}.

(C) Finn alle stasjonære punkter til funksjonen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 & 26 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 7$.

(D) Vis at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ er en positiv definit kvadratisk form uten å regne ut egenverdiene til B.

Oppgave 5.

Vi betrakter vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(A) Er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ lineært uavhengige? Begrunn svaret.
(B) Finn tre lineært uavhengige vektorer blant vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

Oppgave 6.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

(A) Vis at $\lambda = 2$ er en egenverdi for A.
(B) Finn alle egenverdiene til A. Bruk dette til å finne $\det(A)$.

Oppgave 7.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 3 & t & 2 \\ 4 & 2t+4 & 0 \\ 1 & t+1 & 1 \end{pmatrix}$$

for en konstant t.

(A) Regn ut $\det(A)$. Er de tre kolonnevektorene i A lineært uavhengige?
(B) Finn alle egenverdiene til A når $t = -2$.

Oppgave 8.

Vi betrakter den kvadratiske formen Q gitt ved

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_3x_4 + 4x_4^2$$

(A) Regn ut vektoren $\partial Q/\partial \mathbf{x}$ av første ordens partielle deriverte til den kvadratiske formen Q, og finn alle stasjonære punkter for Q.
(B) Avgjør om Q er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit.

Oppgave 9.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -s \\ s & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(A) Regn ut $\det(A)$. For hvilke verdier av s har matriselikningen $AX = I$ løsninger?
(B) Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$ basert på de tre datapunktene

$$(y, x_1) = (2,2),\ (5,0),\ (-1,3)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$, og tegn inn de tre datapunktene og beste tilpasning i et koordinatsystem.

Oppgave 10.

Vi betrakter den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2(a-2)x_1x_3$$

(A) Finn den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, og finn egenverdiene til A når $a = 3$.
(B) For hvilke verdier av a er den kvadratiske formen henholdsvis positiv definit, negativ definit og indefinit?

Oppgave 11.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(A) Regn ut $\det(A)$. For hvilke verdier av a er matrisen A inverterbar?
(B) Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ basert på de fire datapunktene

$$(y, x_1, x_2) = (2, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (3, 0, -1),\ (4, 1, 1)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

Oppgave 12.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4 + 2x_1 - 3x_3 - x_1^2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - 3x_3^2$$

(A) Skriv funksjonen f på matriseform $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$, og bruk dette til å finne de stasjonære punktene til f.
(B) Avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit. Bruk dette til klassifisere eventuelle stasjonære punktene som maksimum-, minimum- eller sadelpunkter.

Oppgave 13.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & s \\ 1 & 2 & s^2 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

(A) Regn ut $\det(A)$. For hvilke verdier av s er matrisen A inverterbar?
(B) Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ basert på de fire datapunktene

$$(y, x_1, x_2) = (1, 0, 0),\ (2, 1, 0),\ (-1, 0, -1),\ (8, 1, 1)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

Oppgave 14.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8 + 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2$$

(A) Skriv funksjonen f på matriseform $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$, og bruk dette til å finne de stasjonære punktene til f.

(B) Vis at $\lambda = -1$ er en egenverdi for A.

(C) Avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit. Bruk dette til klassifisere eventuelle stasjonære punktene som maksimum-, minimum- eller sadelpunkter.