FORELESNING 10

MET 1180

MATEMATIK

BI

Eivind Eriksen   OKT 21, 2015

Plan:

1. Tangenter og derivasjon
2. Derivasjonsregler

Pensum:

[S] 6.1 – 6.5

Eksamen:

MET 11801   V

MET 11802   Flervalgs eksamen 20. november

MET 11803   Skriftlig eksamen Våren 2016

Alle hjelpemidler

= alle skrevne hjelpem.
+ BI godkj. kalk.

15 spørsmål, 3 t.
4 alternativer
+ velger å ikke svare

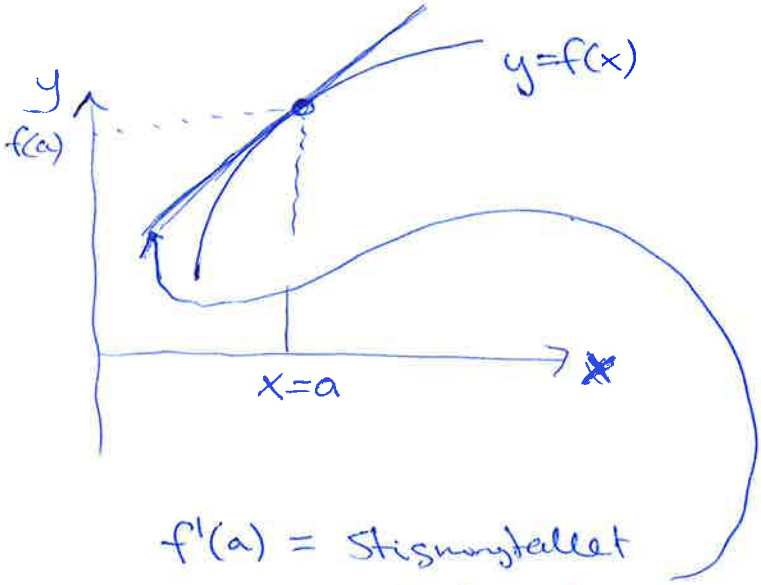
3p riktig svar
−1p galt svar
0p ikke besvart

Tema:

Finansmatematikk
Likninger og ulikheter
Funksjoner
Derivasjoner

Lærebok: [S] Kap 1–7
[E] Kap 0–4.

① Tangenter og den deriverte

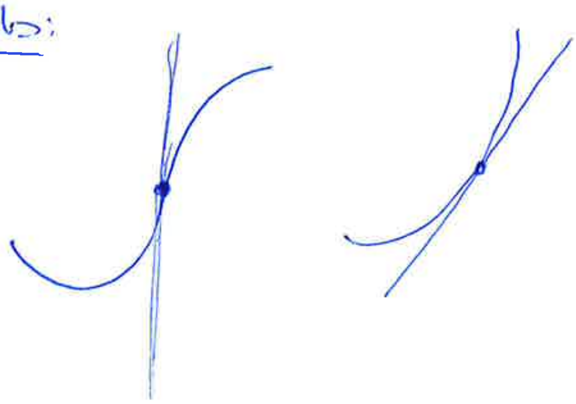


$f'(a)$ = Stigningstallet til tangenten

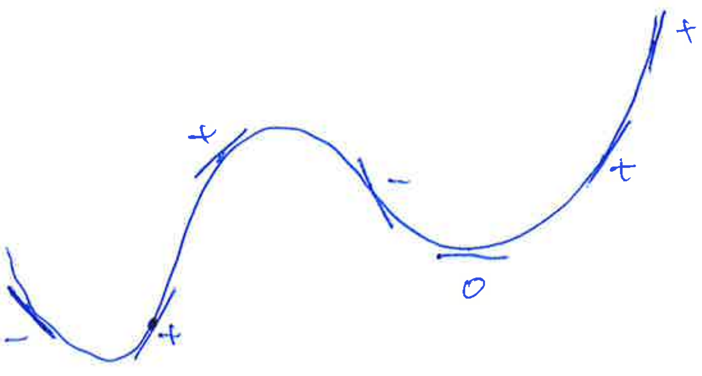
Den rette linjen gjennom punktet $(a, f(a))$ som gir beste tilnærming til funksjonen i nærheten av $x=a$ kalles <u>tangenten</u> til f i $x=a$.

Stigningstallet til denne tangenten skrives $f'(a)$ og kalles den deriverte til f i $x=a$.

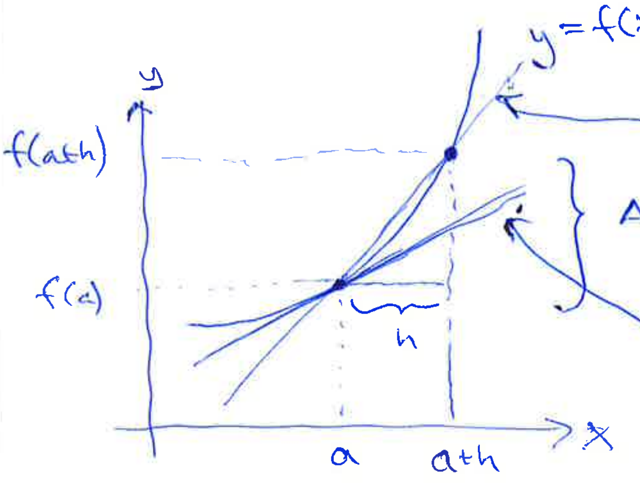
<u>Eks:</u>



$f'(a)$ kalles også momentan <u>veksthastighet</u> for f i punktet



Sekanter og tilnærming av den deriverte



$\Delta y = f(a+h) - f(a)$

Velger $h \neq 0$ og finner en sekant.

tangent i $x=a$

Idé: Hvis h er nært 0 slik at $x=a+h$ er nært $x=a$, da er sekanter nært tangenten i $x=a$.

$(x_1,y_1), (x_2,y_2)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Stigningstallet til sekanten

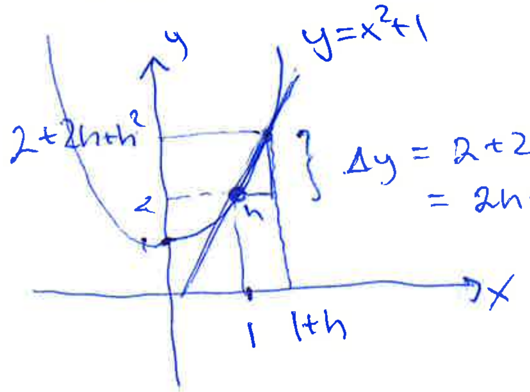
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Den deriverte:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definisjonen av den deriverte $f'(a)$.

Eks: $f(x) = x^2+1$ i $x=1$



$$\Delta y = 2+2h+h^2-2 = 2h+h^2$$

$$f(1+h) = (1+h)^2+1 = 1+2h+h^2+1 = 2+2h+h^2$$

Stigningstallet til sekanten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}(2+h) = \underline{\underline{2}}$$

Den deriverte = stign. tallet til tangenten $= 2$ i $\underline{x=1}$.

Den deriverte funksjonen

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

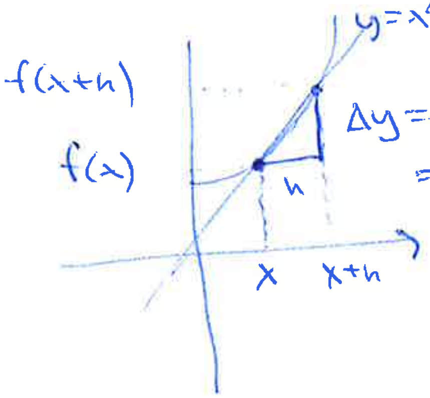
(den deriverte i $x = a$)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(den deriverte funksjonen)

Eks: $f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) =$



$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$
$$= [(x+h)^2 + 1] - [x^2 + 1]$$

Stigningstallet til sekanten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{((x+h)^2 + \cancel{1}) - (x^2 + \cancel{1})}{h}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= 2x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = \underline{\underline{2x}}$$

Dette er den deriverte funksjonen til $f(x) = x^2 + 1$.

Den deriverte funksjonen $f'(x)$, så kan vi finne den deriverte $f'(a)$ i ethvert punkt $x = a$.

Vi bruker ofte derivasjonsregler for å finne den deriverte funksjonen.

② Derivasjonsregler

Skrivemåter for den deriverte:

Funksjon $f(x) \rightsquigarrow$ $f'(x)$, f', $\dfrac{df}{dx}$, $(x^2+1)'$ — den deriverte funksjonen

$f(x) = x^2+1$

Leibniz'-notasjon:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{① \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad \text{(n er et vilkårlig tall)}}$$

Eks:

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x)' = 1$

$(1)' = 0$

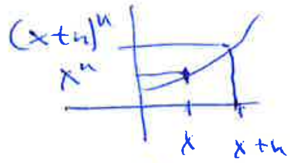
$f(x) = ax+b$ lineær $\Downarrow$ $f'(x) = a$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x\sqrt{x})' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$



Hvorfor er det slik?

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \underset{n=3}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \cancel{- x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = \underline{3x^2} = n \cdot x^{n-1}$$

---

(2)

$$\boxed{\begin{aligned} (u(x)+v(x))' &= u'(x)+v'(x) \\ (u(x)-v(x))' &= u'(x)-v'(x) \\ (c \cdot u(x))' &= c \cdot u'(x) \end{aligned}}$$

} derivasjon ledd for ledd

$u(x), v(x)$ er vilkårlige uttrykk i x.
c er en konstant

Eks: $(x^2+3x-4)' = (x^2)' + (3x)' - (4)'$

$$= \underline{2x + 3}$$

$$(x^7 - 3x^2 + 4)' = 7x^6 - (3x^2)' + 0$$
$$= 7x^6 - 3 \cdot 2x = \underline{7x^6 - 6x}$$

(3)

$$\boxed{(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

produktregelen

$u(x), v(x)$ vilkårlige uttrykk i x

$(uv)' = u'v + uv'$ (kortere skrivemåte)

Eks: $(u\cdot v)' = u'v + uv'$

$$(x\cdot\sqrt{x})' = x'\cdot(\sqrt{x}) + x\cdot(\sqrt{x})'$$

$$(x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$= 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \underline{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}}$$

(4)
$$\boxed{\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}}$$

Brøkregelen (kvotient-regelen)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\cdot v'}{v^2}$$

$u(x), v(x)$ vilkårlige uttrykk i x

Eks: $\left(\frac{\overset{=u}{x+1}}{\underset{=v}{x^2-3x+4}}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{1\cdot(x^2-3x+4) - (x+1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+4)^2}$$

$$= \frac{x^2-3x+4 - (2x^2-x-3)}{(x^2-3x+4)^2}$$

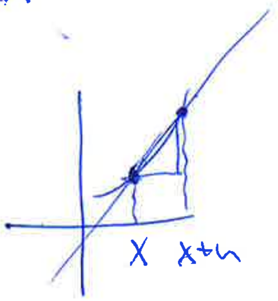
$$= \underline{\underline{\frac{-x^2-2x+7}{(x^2-3x+4)^2}}}$$

$f'(1) = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$

Bevis: Produktregeln

$$f(x) = u(x)\cdot v(x)$$
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$



$$= \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= u(x+h)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x) = \underline{u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}$$

5 $\boxed{\left(h(u(x))\right)' = h'(u(x)) \cdot u'(x)}$ Kjerne-regelen

Indre funksjon / kjerne: $u(x)$

Ytre funksjon $h(u)$

Eks: $\sqrt{x^2+1} = \underset{(\text{ytre})}{\sqrt{u}}$, $\underset{(\text{kjerne})}{u = x^2+1}$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left(\sqrt{u}\right)' \cdot u'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (x^2+1)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

Eks: $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \underset{\text{brøk}}{=} \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}}$

$$\|$$

$$\left((x^2+1)^{-1}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot (x^2+1)' = -\frac{1 \cdot 2x}{u^2}$$
$$= \underline{\underline{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}}}$$

$u = x^2+1$ kjerne

$h(u) = u^{-1} = \frac{1}{u}$ ytre

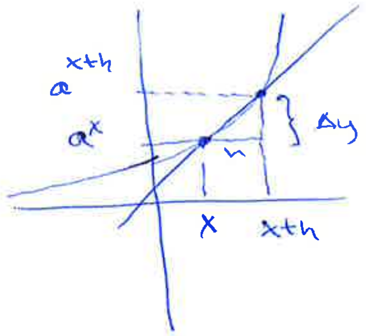
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Kjerneregeln med Leibniz'-notasjon:

$$\left(h(u(x))\right)' = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Derivasjon av eksponentialfunksjonen

$$f(x) = a^x \quad , \; a > 0$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$$

$$= a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

$$f'(x) = (a^x)' = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= a^x \cdot \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}$$

en konstant som avh. av a

$$= a^x \cdot \ln(a)$$

a=10:

$h = 0.01$: $\frac{10^{0.01} - 1}{0.01} \simeq 2.33$

$\frac{10^{0.001} - 1}{0.001} \simeq 2.31$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \simeq 2.3 \text{ for } a = 10$$

ln(10)

$$\simeq 0.69 \text{ for } a = 2$$

ln(2)

① $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$ for $a > 0$ (vanskelig å finne denne grensen.)

② $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

③ $(e^x)' = e^x$ fordi $\ln(e) = 1$

⑥ $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)}$

derivasjonsregel for eksponentialfunksjoner.

Viktig spesialtilfelle: $(e^x)' = e^x$

Derivasjon av logaritmefunksjoner

Hva er $(\ln x)'$?

$$e^{\ln x} = x$$

fordi $\ln(x)$ er den omvendte funksjonen til e^x.

e^u, $u = \ln x$

$$(e^{\ln x})' = (x)'$$

$$e^u \cdot (\ln x)' = 1$$

$$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

⑦ $\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$

derivasjonsregel for naturlig logaritmefunksjon

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

(andre logaritmer)

Derivasjonsregler:

① $(x^n)' = nx^{n-1}$

② $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(c \cdot u)' = c \cdot u'$

③ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

④ $(u/v)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

⑤ $(h(u(x)))' = h'(u(x)) \cdot u'(x)$

$= \dfrac{dh}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

⑥ $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ $(a>0)$

⑦ $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln(a)}$ $(a>0)$

$u = u(x)$, $v = v(x)$

- Vilk. uttrykk i x

c, n

- konstanter