FORELESNING 11

MET11 80

MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN OKT. 28, 2015

Plan:

1. Oppsummering: Derivasjonsregler
2. Implisitt derivasjon
3. Funksjonsdrøfting og optimering (maks/min-problemer)

Pensum:

[S] 6.7–6.9, 6.11

1 Derivasjonsregler

To måter å finne den deriverte på:

i) Fra defn.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ii) Ved hjelp av derivasjonsreglene.

Derivasjonsregler:

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ for alle n (alle reelle tall)
2. $(u+v)' = u' + v'$, $(u-v)' = u' - v'$, $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ — $u = u(x)$, $v = v(x)$, c er en konstant
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $\left(u/v\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

BI

⑤ **Kjerneregelen**

h: ytre funksjon
u: kjerne.

$$f(x) = h(u(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x)$$

eller

$$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

⑥ $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ når $a > 0$, $a \neq 1$

⑦ $(\ln x)' = 1/x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ når $a > 0$, $a \neq 1$

Eks:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

i) $(xe^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x = \underline{(x+1)e^x}$

ii) $\ln(x^2+1)' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \underline{\frac{2x}{x^2+1}}$ $\begin{cases} h(u) = \ln u \\ u = x^2+1 \end{cases}$

iii) $\left(\frac{x+1}{x-4}\right)' = \frac{1 \cdot (x-4) - (x+1) \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{\cancel{x} - 4 - \cancel{x} - 1}{(x-4)^2}$

$(u/v)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$= \underline{\frac{-5}{(x-4)^2}}$

Funksjoner som ikke er deriverbare overalt

Selv om en funksjon er definert i $x=a$, så er det ikke sikkert at $f'(a)$ er definert. Det er altså ikke sikkert at grenseverdien

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

eksisterer. For eksempel fordi

i) grenseverdien er $\pm\infty$

ii) de to ensidige grenseverdien er forskjellige

Eks:

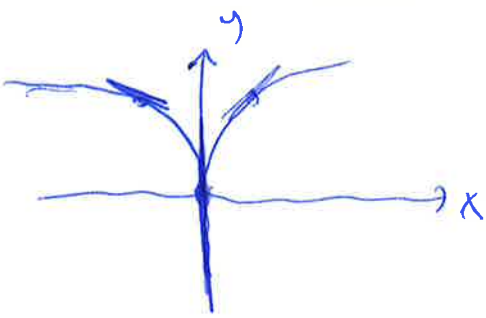
a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$$= x^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \; x \neq 0$$

f er deriverbar for $x \neq 0$, med $f' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Hva med $x=0$? $\lim_{x \to 0} f'(x) = \pm\infty$

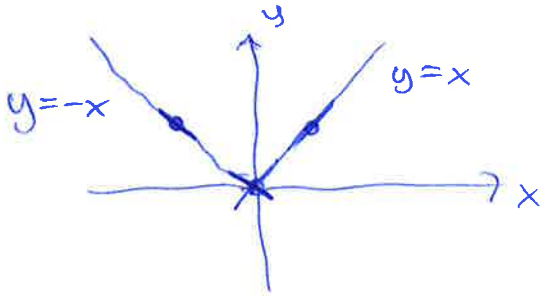


Tangenten i $x=0$ er y-aksen, dvs

$x = 0$

f er ikke deriverbar i $x=0$

b) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ kont. definert overalt.



$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

<u>I punktet $x=0$:</u>

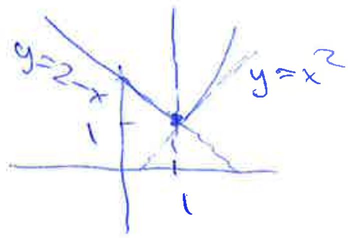
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0} -1 = -1$$

$f'(0)$ er <u>ikke definert</u>

$x=0$ er et <u>knekkpkt</u>, ~~dvs~~ og f er ikke deriverbar i $x=0$.

<u>Eks:</u> $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2-x, & x < 1 \end{cases}$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

<u>I $x=1$:</u> $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2$

$\neq$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1} -1 = -1$

$x=1$ knekkpkt $\Rightarrow$ <u>f ikke deriverbar i $x=1$</u>

2 Implisitt derivasjon

Funksjon, eksplisitt form:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$y = x^2 \cdot e^x$$

$$y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

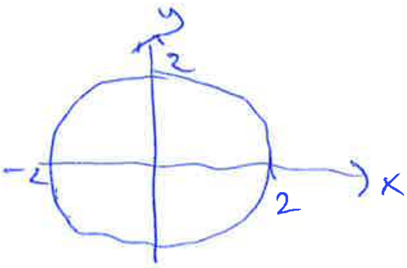
$$= (2x + x^2) e^x$$

Implisitt form

Eks: $x^2 + y^2 = 4$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2$$



Eks: $x^2 y^3 (x+y) - xy = 0$

Implisitt derivasjon:

Eks: $x^2 + xy - y^2 = 1$

Idé: $y = y(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + \frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + (y + xy') - 2y \cdot y' = 0$$

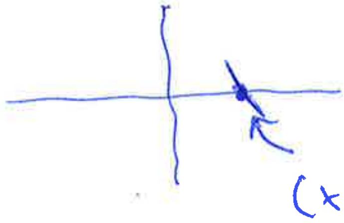
$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \underline{2y \cdot y'}$$

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d(x)}{dx} \cdot y + x \cdot \frac{d(y)}{dx}$$

$$= 1 \cdot y + x \cdot 1 \cdot y'$$

$$= \underline{y + xy'}$$

$$x^2 + xy - y^2 = 1$$



$(x,y) = (1,0)$

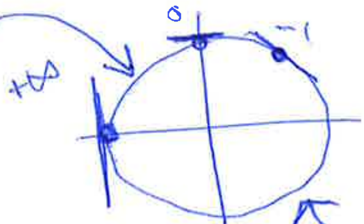
$$y' = -\frac{2\cdot 1 + 0}{1 - 2\cdot 0} = \underline{-2}$$

$$2x + y + xy' - 2y\cdot y' = 0$$

$$xy' - 2y\cdot y' = -2x - y$$

$$(x-2y)\cdot y' = -2x - y$$

$$y' = -\frac{2x+y}{x-2y}$$



Eks: $\quad x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + 2y\cdot y' = 0$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d(y^2)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 2y\cdot y'$$

$$2y\cdot y' = -2x$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$y = \pm\sqrt{4-x^2}$$

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow \underline{y = \sqrt{4-x^2}} \quad \text{eller} \quad y = -\sqrt{4-x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Eks:

$$(x^x)' = \cancel{1?}$$

$$y = x^x \Longrightarrow \ln y = \ln(x^x) = x \cdot \ln(x)$$

logaritmisk derivasjon

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \cdot \ln x)$$

$$\frac{d(\ln y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \underline{\ln x + 1}$$

$$y' = y \cdot (\ln x + 1)$$

$$y' = \underline{\underline{x^x \cdot (\ln x + 1)}}$$

Kommentar:

Ikke skriv $\log(x)$, skriv $\boxed{\ln(x) \text{ eller } \log_a(x)}$

(3) Funksjonsdrøfting og optimering.

Monotoni-egenskaper.

Eks: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

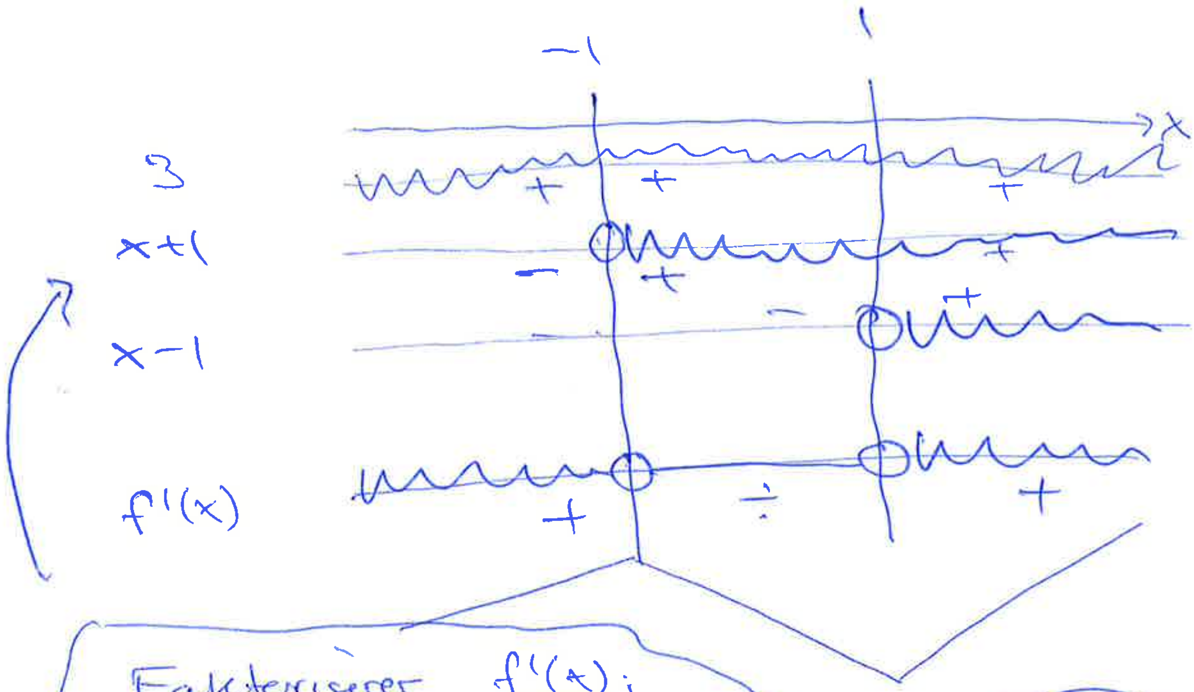
$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(0) = -3$

$f'(1) = 0$

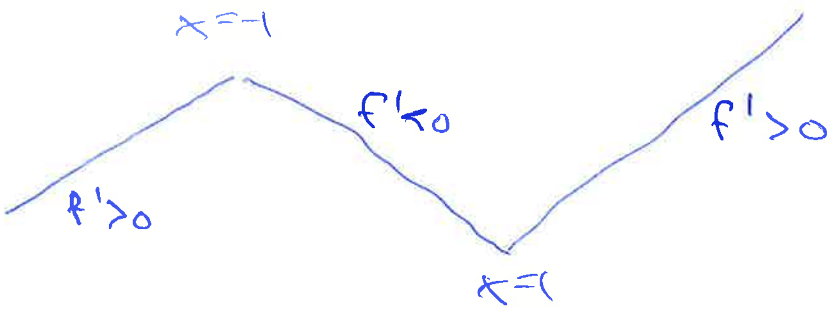
$f'(2) = 9$

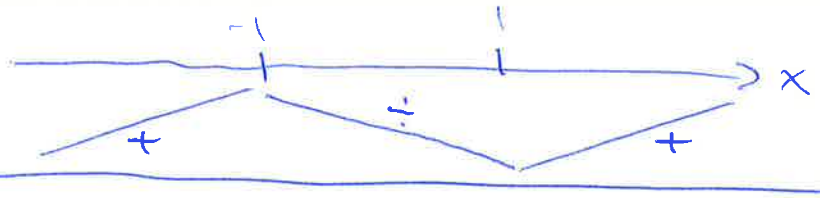
Vi kan sette opp et fortegnsdiagram for $f'(x)$:



Faktoriserer $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3 \cdot (x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$





BI

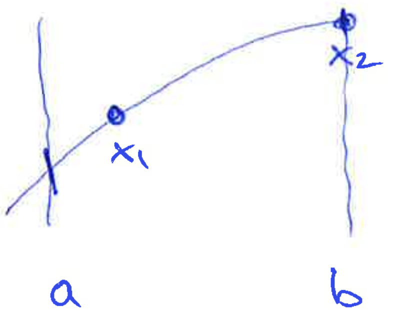
Konklusjon: Monotoni-intervaller

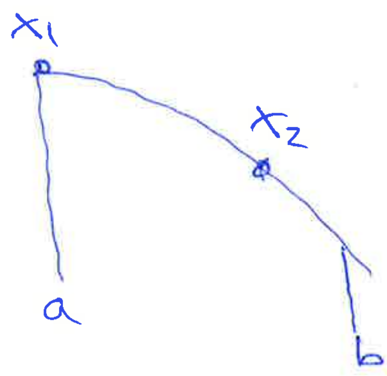
f er	strengt voksende	i	$(-\infty, -1]$
"	strengt avtagende	i	$[-1, 1]$
"	strengt voksende	i	$[1, \infty)$

Defn:

f er <u>strengt voksende</u> i $[a,b]$ hvis $f(x_1) < f(x_2)$ når $x_1 < x_2$ i $[a,b]$

f er <u>strengt avtagende</u> i $[a,b]$ hvis $f(x_1) > f(x_2)$ når $x_1 < x_2$ i $[a,b]$





Resultat:

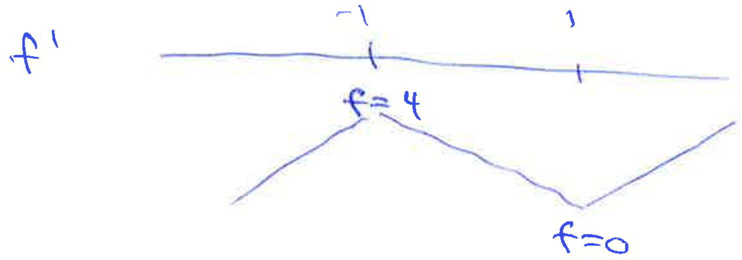
$f'(x) > 0$ for alle x i (a,b) $\Rightarrow$ f er strengt voksende på $[a,b]$

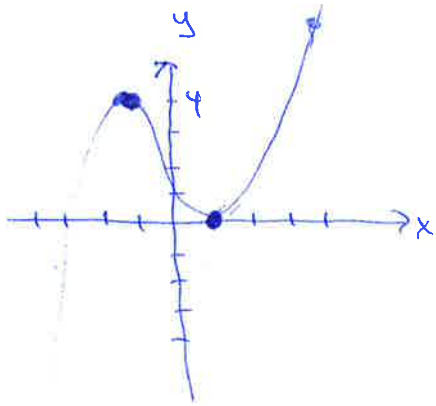
$f'(x) < 0$ for alle x i (a,b) $\Rightarrow$ f er strengt avtagende på $[a,b]$

Eks: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2 = 4$

$x = 1$: $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 0$





Maksimum og minimum (optimering)

Defn: $x = x^*$ er et maksimumspunkt (globalt maks) dersom $f(x^*) \geq f(x)$ for alle x.

$x = x^*$ er et minimumspunkt (globalt min) dersom $f(x^*) \leq f(x)$ for alle x

$x = 3$: $f(3) = 3^3 - 3\cdot 3 + 2 = 20 > 4$

$\Rightarrow x = -1$ ikke globalt maks.

Defn: $x = x^*$ er et lokalt maks dersom $f(x^*) \geq f(x)$ for alle x nært x^*.

$x = x^*$ er et lokalt min dersom $f(x^*) \leq f(x)$ for alle x nært x^*.

$x = -1$ er et lokalt maks. med maks. verdi $f(-1) = 4$

$x = 1$ er et lokalt min. med min. verdi $f(1) = 0$

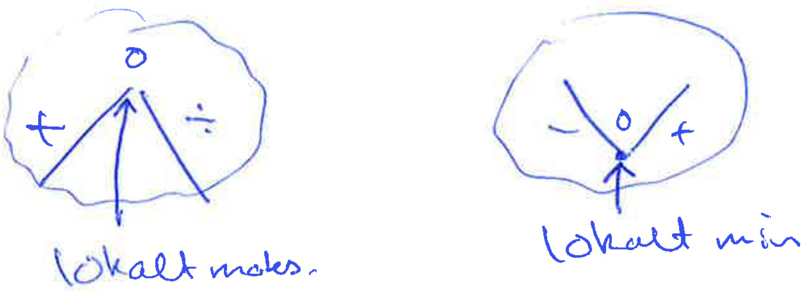
$x = -1$

lokalt maks

$x = 1$

lokalt min

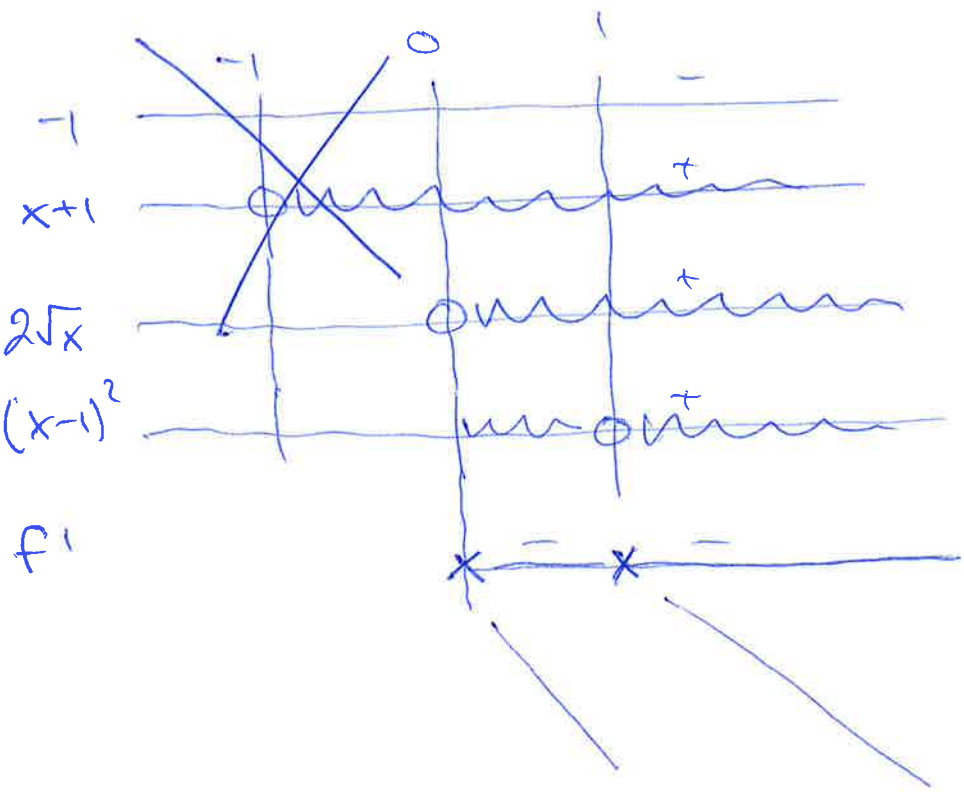
Vi kan finne lokale maks- og min-pkt for f fra fortegnsskjemaet for $f'(x)$.



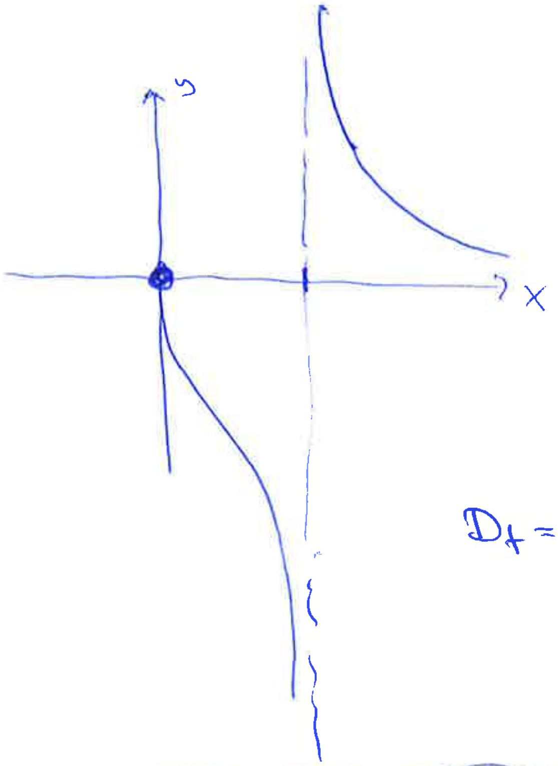
Eks: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, $x \neq 1,\ x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x-1) - \sqrt{x}\cdot 1}{(x-1)^2} \quad \begin{matrix}\cdot 2\sqrt{x} \\ \cdot 2\sqrt{x}\end{matrix}$$

$$= \frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}\cdot(x-1)^2} = \frac{-(x+1)}{2\sqrt{x}\cdot(x-1)^2}$$



f er strengt avtagende i $[0,1)$ og strengt avtagende i $(1,\infty)$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$f' = \frac{-(x+1)}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$$

$x=0$ er et lokalt maks.

$D_f = [0,1)$ og $(1,\infty)$

Resultat:

Hvis $x = x^*$ er et lokalt maks. eller lokalt min. (lokalt ekstrempkt), så er x^* enten:

i) $x = x^*$ er et stasjonært pkt, dvs $f'(x)=0$

ii) $x = x^*$ er et pkt der $f'(x)$ ikke er defn.

iii) $x = x^*$ er et randpunkt $x=a$ hvis $D_f = [a, \ldots$
$x=b$ hvis $D_f = \ldots, b]$

Eks: $f(x) = x^4 - 4x + 7 \quad , \quad x \geq 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$
$$= 4(x^3-1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$f'(x)=0$: $4(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ eller $x^2+x+1=0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ingen løsn.

1) Stasjonære pkt: $f'(x)=0$

$x=1$

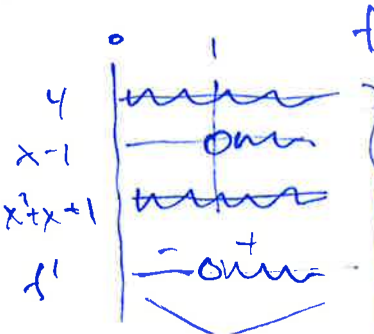
2) Pkt hvor $f'(x)$ ikke eksisterer

ingen

3) Randpkt:

$x=0$

$x=1$



$x=1$ lokalt min

$x=0$ lokalt maks