FORELESNING 12

MET1180 MATEMATIKK BI

EIVIND ERIKSEN, NOV 04, 2015

Plan:

1. Optimering (max/min-problem)
2. L'Hospitals regel
3. Elastisitet
4. Grenseinntekt / kostnad

Pensum:

[S] 6.6, 6.10 - 6.11

[E] Kap 4.6 – 4.7 (kommer snart)

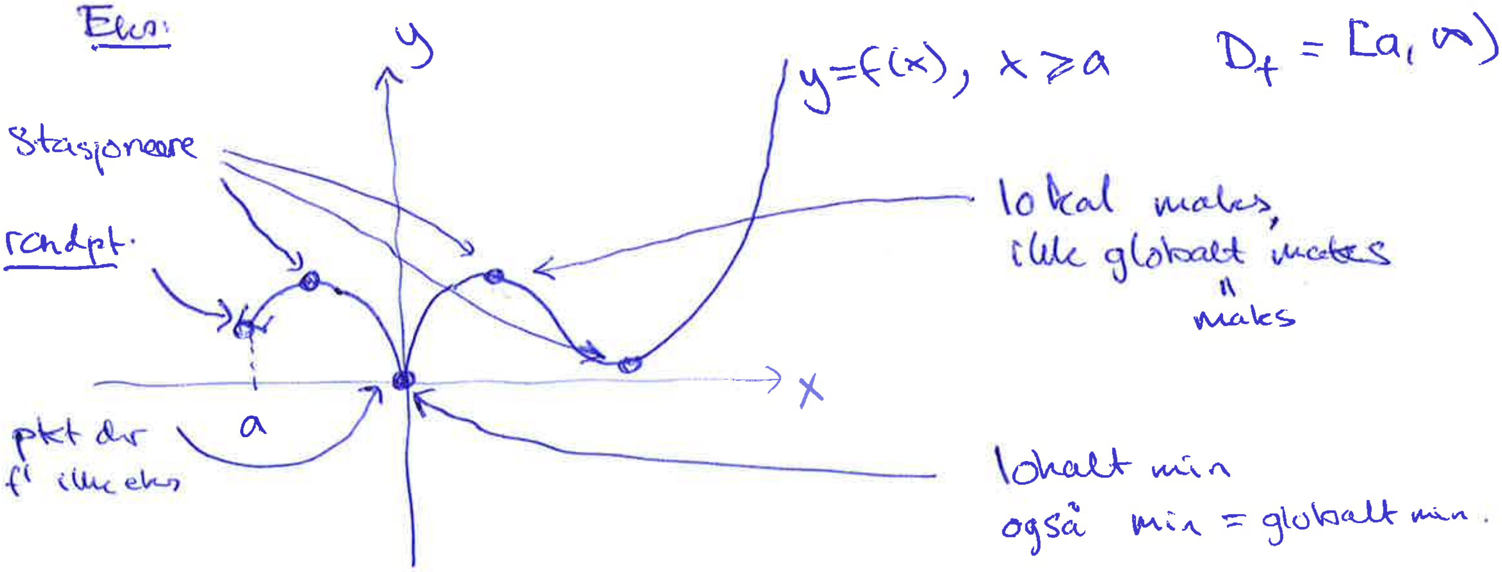
Torsdag: Plenumsregning

Siste forelesning: Gå gjennom prøve-eksamen.

1 Optimering: Max/min - problemer

Eks:

$y = f(x), \ x \geq a \qquad D_f = [a, \infty)$



Vi ønsker å finne (globale) maks/min.

Metode:

① Finne lokale maks/min.

② Undersøke om noen disse pkt (fra ①) er globale maks/min = maks/min.

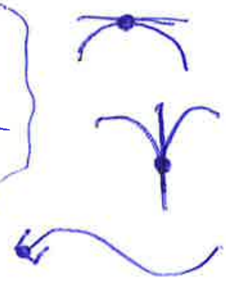
①: Hvis x^* er et lokalt maks/min for f, så er x^* enten

kritiske pkt.

i) Stasjonært pkt: $f'(x) = 0$

ii) pkt der f ikke er deriverbar

iii) randpkt



Vi finner pkt i i) ii) ved å regne ut $f'(x)$

iii) ved å se på D_f

Deretter sjekker vi om disse er lokale maks eller lokale min ved å sette opp fortegnsskjema for $f'(x)$.

Ex: $f(x) = x^2 e^x$ Finn lokale maks/min.

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2+2x)e^x$$

i) Stasjonære pkt: $f'(x) = 0$ $(x^2+2x)e^x = 0$

$$x^2 + 2x = 0$$

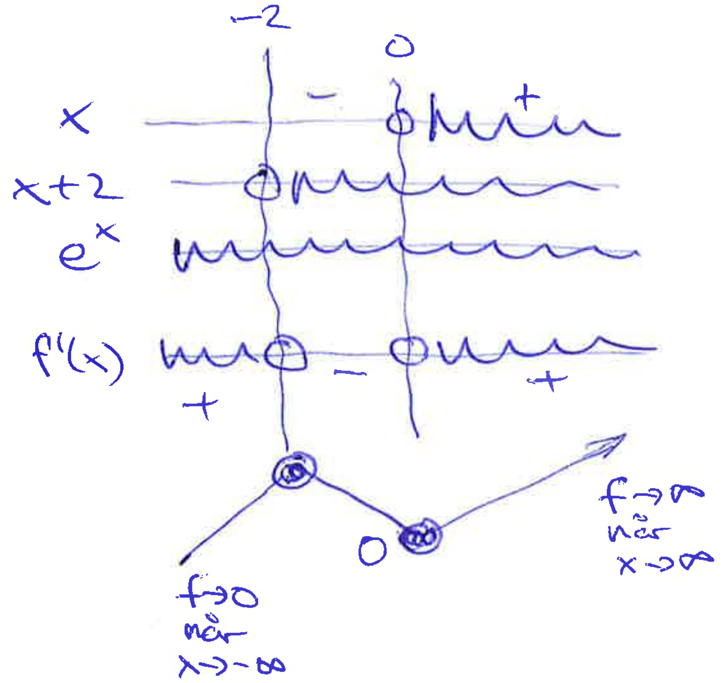
$$x = 0, \quad x = -2$$

ii) Pkt der $f'(x)$ ikke eks: Ingen.

iii) Randpkt: Ingen.

Kandidat pkt: $x=0$, $x=-2$

Fortegnsskjema for $f'(x) = (x^2+2x)e^x$
$= x\cdot(x+2)e^x$



$x=-2$ er lokalt maks

$x=0$ er lokalt min

(2) Undersøke om noen av de lokale maks eller min er globale maks/min.

Se på fortegnsdiagrammet for $f'(x)$

$f=x^2e^x$

maks: lokalt maks i $x=-2$, $f(-2)=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\quad f(2) = 4e^2$

Konkl: f har ingen maks.

Min: lokalt min i $x=0$, $f(0)=0$

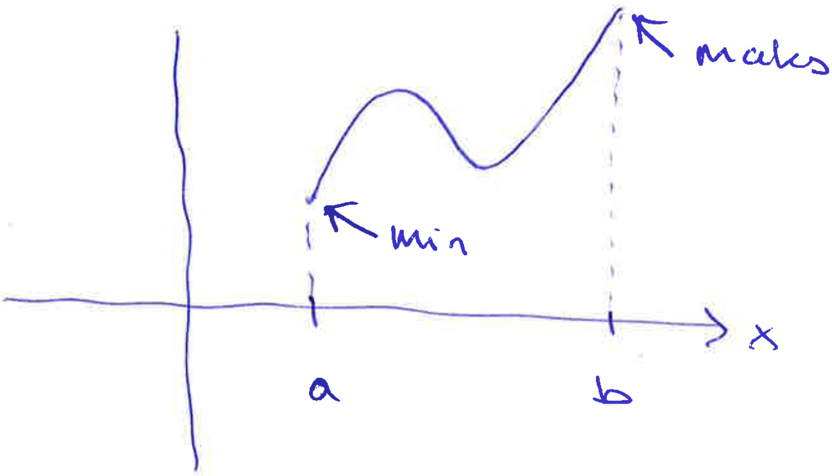
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = $ "$\infty\cdot 0$" ubestemt grenseverdi

$f(x)=x^2e^x \geq 0$ for alle x $\Rightarrow$ $\boxed{x=0 \text{ er minimum}}$

Teorem (Ekstremverdisetningen)

Hvis f er en kontinuerlig funksjon definert på $[a,b]$, da har f globale maks/min.

dvs. både globalt maks og globalt min



Eks: $f(x) = x^2 e^x$, $D_f = [1, 4]$

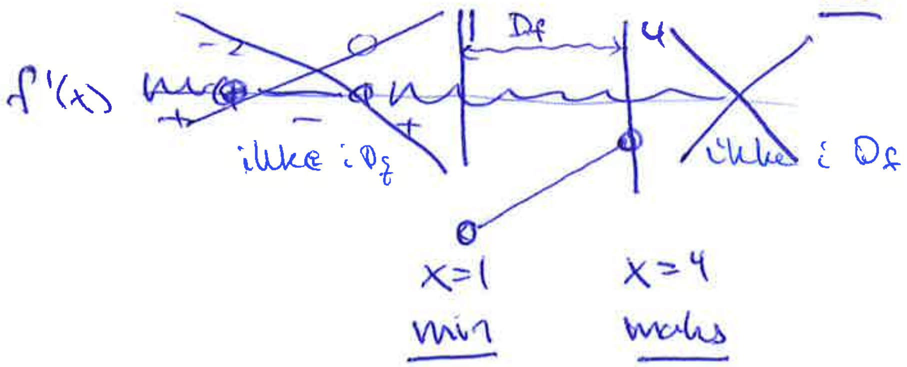
Vet at vi har maks og min fra [EVS], og maks/min må finnes blant lokale maks/min.

Lokale maks/min:

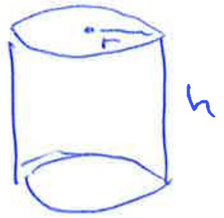
i) Stasj. pkt: Ingen $(x=0,\ x=-2$ ikke med$)$

ii) Pkt der f' ikke fins: Ingen

iii) Randpkt: $x=1$, $x=4$ $\quad f(1)=e$ (min) $\quad f(4)=16e^4$ (maks).



Eks:



colaboks

$V = 0{,}33$

$= 330\ (\text{cm}^3)$

Vi ønsker $V = 330$ og minst mulig overflate.

$$V = \pi r^2 \cdot h = 330$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{330}{\pi r^2}}$$

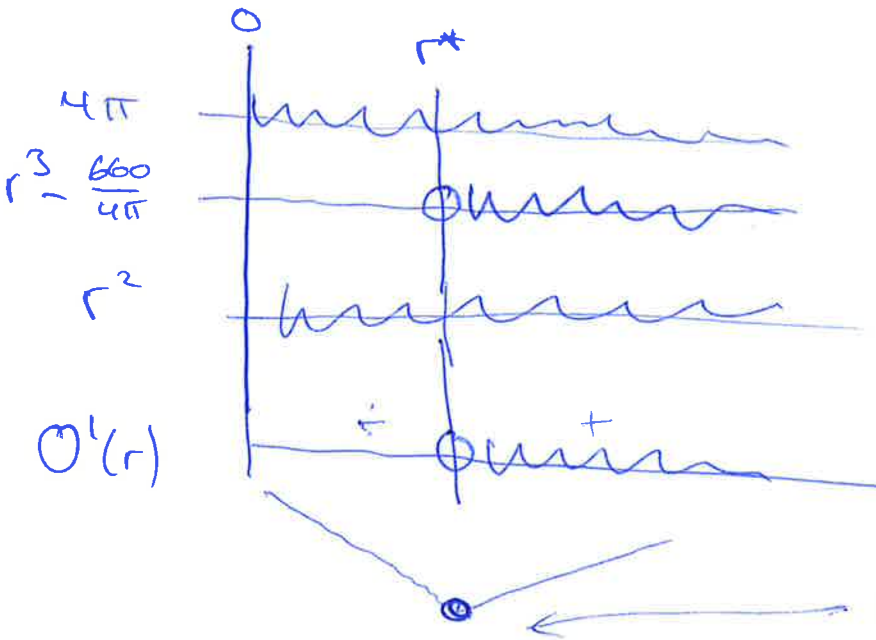
$$\boxed{\begin{matrix} r \simeq 3{,}74 \\ \Downarrow \\ h \simeq 7{,}48 \end{matrix}}$$

$$O = 2 \cdot \pi r^2 + h \cdot 2\pi r$$
$$= 2\pi r^2 + 2\pi h r$$

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \frac{330}{\cancel{\pi} r \cancel{r}}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{660}{r}, \quad r > 0$$

Optimeringsproblem: $\min\ O(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}, \quad r > 0$

$$O'(r) = 2\pi \cdot 2r + 660 \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$= 4\pi r - \frac{660}{r^2} = \frac{4\pi r \cdot r^2 - 660}{r^2}$$
$$= \frac{4\pi r^3 - 660}{r^2} = \frac{4\pi \cdot \left(r^3 - \frac{660}{4\pi}\right)}{r^2}$$



$$r^* = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}$$

$$r = r^* = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} \simeq 3{,}74 \quad \text{Minimum}$$

② L'Hospitals regel

(skrives også L'Hôpitals regel)

BI

Metode for å regne ut vanskelige "ubestemte" grenseverdier: "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x \to 0}{x-1 \to 0} \qquad "\frac{0}{0}"$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \to \infty}{e^x \to \infty} \qquad "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} \qquad "\infty\cdot 0"$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \qquad "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\underline{\underline{\text{L'H's regel:}}} \\
\text{Huis } \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ er ubestemt av formen } "\frac{0}{0}", "\frac{\infty}{\infty}" \\
\text{Så er} \\
\qquad \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
\text{(hvis den nye grenseverdien finnes).}
\end{array}}$$

<u>Eks:</u>

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{"0/0"}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{"\infty/\infty"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{"\infty/\infty"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

$$\text{"}\infty\cdot 0\text{"} \qquad \text{"}\infty/\infty\text{"} \qquad \text{"}\infty/\infty\text{"}$$

Eks: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \underline{\underline{0}}$$

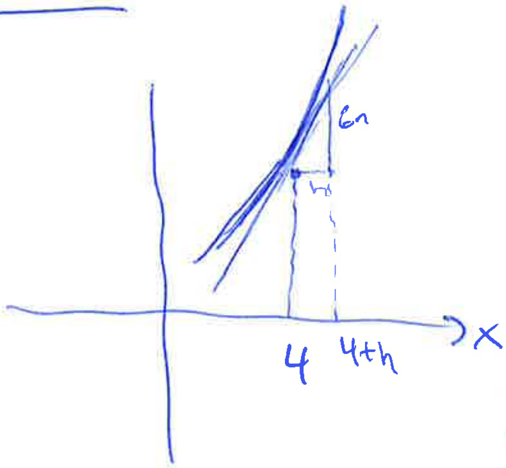
Eks: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{x} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}} \quad \left(\neq \lim\limits_{x\to 1} \frac{-1}{1} = -1 \right)$

3 Elastisitet

$$f(x) = 400 - 2x + x^2$$

$$f'(x) = -2 + 2x = 2x - 2$$

$\underline{x = 4}$: $\quad f'(4) = 2\cdot 4 - 2 = \underline{6}$



$$f(4+h) \simeq f(4) + 6\cdot h$$

økning $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$

i absolutte størrelser

$\underline{h=1}$: $\quad \Delta x = 1 \qquad \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Relative endringer:	Absolutte endringer
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

relativ endring i y

relativ endring i x

BI

Defn:

$$El_x f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{y} \cdot xy}{\frac{h}{x} \cdot xy}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot (f(x+h)-f(x))}{y \cdot h}$$

$$\boxed{El_x f(x) = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Defn: $El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Eks: $D(p) = 100 - 8p$

$D'(p) = -8$

$$El_p D(p) = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p) = \frac{p}{100-8p} \cdot (-8) = \frac{-8p}{100-8p}$$

$\underline{p=5}$: $D(p) = 60$

$$El_5 D(p) = \frac{-8 \cdot 5}{100 - 8 \cdot 5} = \frac{-40}{60} = \underline{-2/3}$$

Tolkning: Dersom prisen p øker med 1% så vil $D(p)$ avta med $\simeq -0.67\%$

Relativ endring:

$$\frac{-0.40}{60} = -\frac{0.04}{6} \simeq -0.0067 = \underline{-0.67\%}$$

$p = 5 + 5 \cdot 0.01 = 5.05$

$D(5.05) = 100 - 8 \cdot 5.05 = 100 - 40.40 = 59.60$

BI

$$I = p \cdot D(p)$$

$$El\, I = \frac{p}{I} \cdot I' = \frac{\cancel{p}}{\cancel{p} \cdot D(p)} \cdot \big(p \cdot D(p) \big)'$$

$$= \frac{1}{D(p)} \cdot \big(1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p) \big)$$

$$= \frac{D(p) + p \cdot D'(p)}{D(p)} = 1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}$$

$$\boxed{El_p\, I = 1 + El_p\, D(p)}$$

Konsekvens: $El_p I = 0 \iff El_p\, D(p) = \underline{-1}$

$El_p I > 0 \iff -1 < El_p\, D(p) < 0$

4 Grenseinntekt og grensekostnad.

$K(x)$ kostnadsfunksjon

$I(x)$ inntektsfunksjon

$\boxed{\begin{array}{ll} K'(x) & \text{grensekostn.} \\ I'(x) & \text{grenseinnt.} \end{array}}$

endring i kostnad ved å produsere 1 ekstra enhet → grensekostn. = marginal kostn.

$$K'(x) \simeq \frac{K(x+1) - K(x)}{1}$$

$$= K(x+1) - K(x)$$

grenseinnt. = marginal innt.

$\pi(x) = I(x) - K(x)$

profitt.

optimalt

$\pi'(x) = 0$

$I'(x) - K'(x) = 0$

$I'(x) = K'(x)$

grense inntekt
= grensekostnad

ved optimal x.

Enhetskostnad:

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}$$

$$A'(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} \begin{array}{c} \cdot \frac{1}{x} \\ \cdot \frac{1}{x} \end{array} = \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

For å minimere enhetskostnaden, må
grensekostnad = enhetskostnad

$K'(x)$ $\qquad$ $A(x) = \frac{K(x)}{x}$

Altså: Nødvendig betingelse for maks av $\pi(x)$:

$I'(x) = K'(x)$
grenseinntekt = grensekostnad

Nødvendig betingelse for min av $A(x) = \frac{K(x)}{x}$

$K'(x) = A(x)$
grensekostnad = enhetskostnad