FORELESNING 13

MET 1150 BI

EIVIND ERIKSEN, NOV 11 2015

MATEMATIKK

Plan:

1. Annenderiverte og høyere ordens deriverte
2. Krumningen og vendepkt
3. Konvekse og konkave funksjoner

Pensum:

[S] 7.1–7.3

([E] 4.9)

Idag: Siste forelesning m/ nytt stoff før eksamen 20. nov.

Pensum Eksamen MET 11802

Lærebok: [S] Kap 1–6 + kap 7.1–7.3

Notatene [E] Kap 0–3 + kap 4.1–4.9

Alt i forelesning + Alt i Oppgaver.

Neste gang: Gjennomgang av Prøve-eksamen + Rep. til eksamen.

① Annenderiverte og høyere ordens deriverte

Eks:

$$f(x) = x^2 - 10x + 16$$
$$f'(x) = \underline{2x - 10}$$
$$f''(x) = (2x-10)' = \underline{2}$$
$$f'''(x) = (2)' = \underline{0}$$
$$f^{(4)}(x) = (0)' = \underline{0}$$

$$f(x) = x^6 - 6x^4 + 7x$$
$$f'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 7$$
$$f''(x) = 30x^4 - 72x^2$$
$$f'''(x) = 120x^3 - 144x$$
$$\vdots$$

Eks:

$$f(x) = xe^x$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{(x+1)e^x}$$
$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = \underline{(x+2)e^x}$$
$$\vdots$$

Eks:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+4}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+4) - (x-1) \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{\cancel{x}+4-\cancel{x}+1}{(x+4)^2}$$

$$= \underline{\frac{5}{(x+4)^2}} = 5 \cdot (x+4)^{-2}$$

$$f''(x) = 5 \cdot (-2) \cdot (x+4)^{-3} \cdot 1$$

$$= \underline{-\frac{10}{(x+4)^3}}$$

⋮

② Tolkning av den annenderiverte

Eks:

a) $f(x) = x \quad , x > 0$

b) $f(x) = e^x \quad , x > 0$

c) $f(x) = \ln x \quad , x > 0$

$f'(x) = 1 > 0$

$f'(x) = e^x > 0$

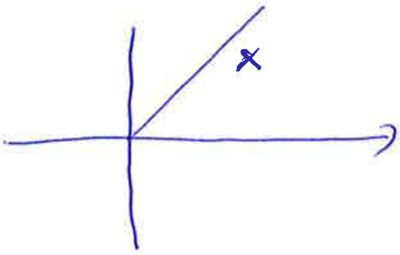
$f'(x) = 1/x > 0$

alle funksjonene er voksende for $\underline{x > 0}$

a) $f''(x) = 0$

b) $f''(x) = e^x > 0$

c) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

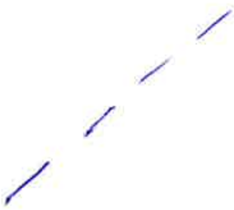


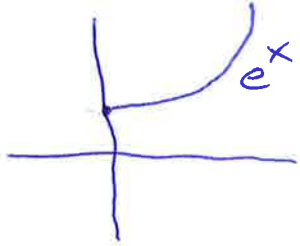
a) $f(x)=x$, $x>0$

Vokser med konstant veksthastighet

$\boxed{f'(x) \text{ konstant}}$

$f''(x)=0$





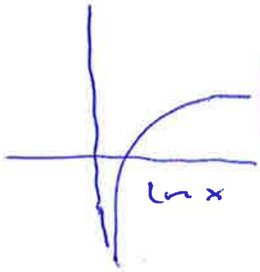
b) $f(x)=e^x$, $x>0$

vokser raskere og raskere

veksthastigheten er økende

$\boxed{f'(x) \text{ er voksende}}$

$f''(x)>0$



c) $f(x)=\ln x$, $x>0$

vokser saktere og saktere

"flater ut"

veksthastigheten er avtagende

$\boxed{f'(x) \text{ er avtagende}}$

$f''(x)<0$

<u>Defn.:</u>

Hvis $f(x)$ er definert på $[a,b]$ så har vi:

i) f er <u>konveks</u> på $[a,b]$ hvis $\boxed{f''(x) \geq 0 \text{ for alle } x \text{ i } (a,b)}$

a b

f konveks

f er <u>strengt konveks</u> på $[a,b]$ hvis $f''(x)>0$ for alle x i (a,b)

"vender den hule siden opp"

"krummer oppover"

ii) f er <u>konkav</u> i $[a,b]$ hvis

$f''(x) \leq 0$ for alle x i (a,b)

f er <u>strengt konkav</u> på $[a,b]$ hvis $f''(x) < 0$ for alle x i (a,b)

"Vender den hule siden ned"

"krummer nedover"

<u>Eks:</u> $f(x) = x^2 - 10x + 16$ <u>konveks/konkav?</u>

$f'(x) = 2x - 10$

$f''(x) = 2$

$f''(x) > 0$ for alle x

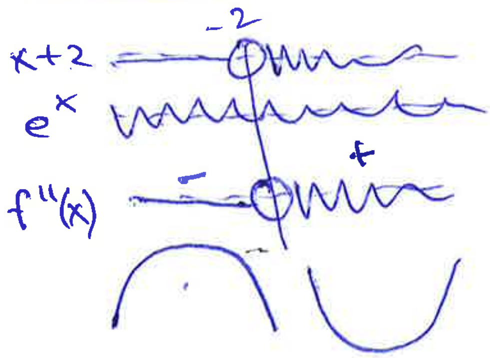
$f(x) = x^2 - 10x + 16$ er <u>konveks overalt</u>

<u>Eks:</u> $f(x) = xe^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$f''(x) = \underline{(x+2)e^x}$

<u>Fortegnsdiag. for $f''(x)$:</u>



f er konkav på $(-\infty, -2]$
f er konveks på $[-2, \infty)$

Viktig defn:

f er **konveks** hvis f er konveks i hele D_f

f er **konkav** hvis f er konkav i hele D_f.

Vendepunkt:

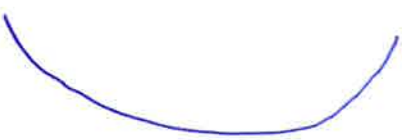
Et **vendepkt for f** er et punkt $x = x^*$ der f er definert og der den dobbeltderiverte $f''(x)$ skifter fortegn.

Eks:

$f(x) = x^2 - 10x + 16$

$f''(x) = 2 > 0$

$2 = f''$ 

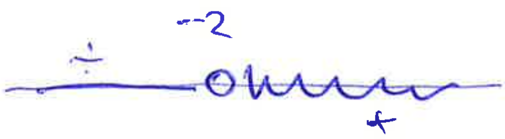


f er konveks

Ingen vendepkt

$f(x) = xe^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

f'' 

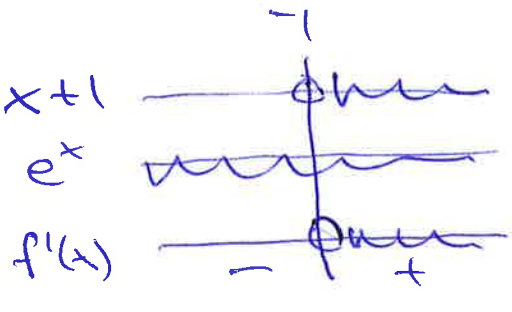
f er konkav i $(-\infty, -2]$

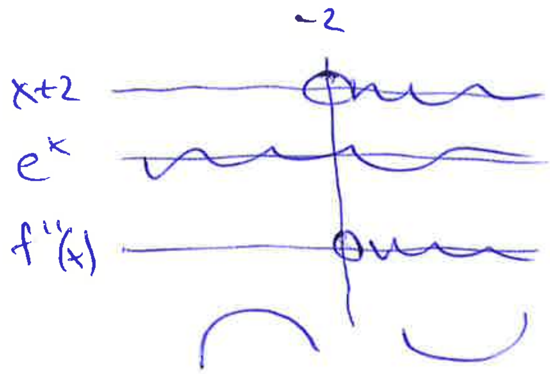
f er konveks på $[-2, \infty)$

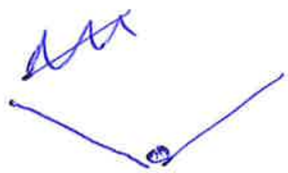
Vendepkt: $x = -2$

$$f(x) = xe^x$$
$$f'(x) = (x+1)e^x$$
$$f''(x) = (x+2)e^x$$

<u>funksjonsdrøfting for f</u>







f avtagende i $(-\infty, -1]$

f ~~avtagende~~ voksende i $[-1, \infty)$

$x = -1$ <u>minimum</u> $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

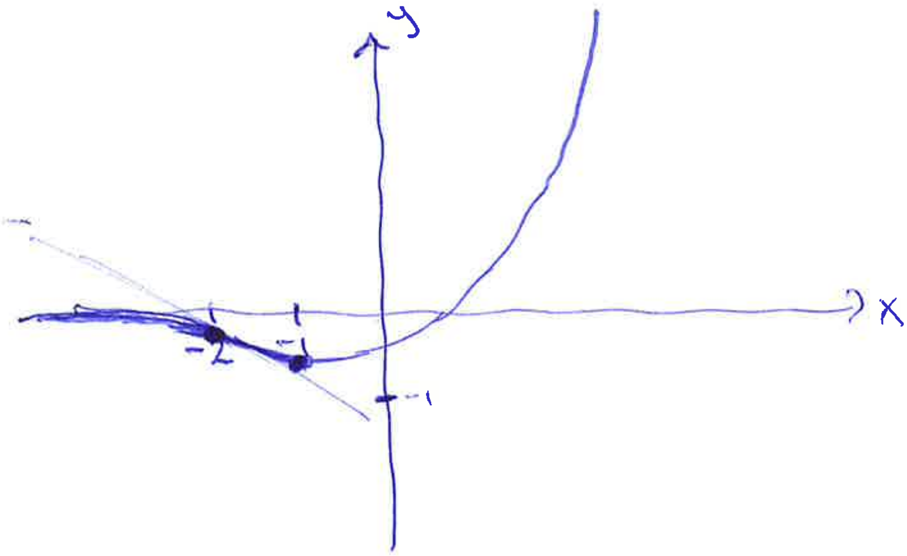
f er konkav i $(-\infty, -2]$

f er konveks i $[-2, \infty)$

$x = -2$ er vendepkt.

$$f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$$

$$f'(-2) = -1 \cdot e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$$



$$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)}$$

Eks:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

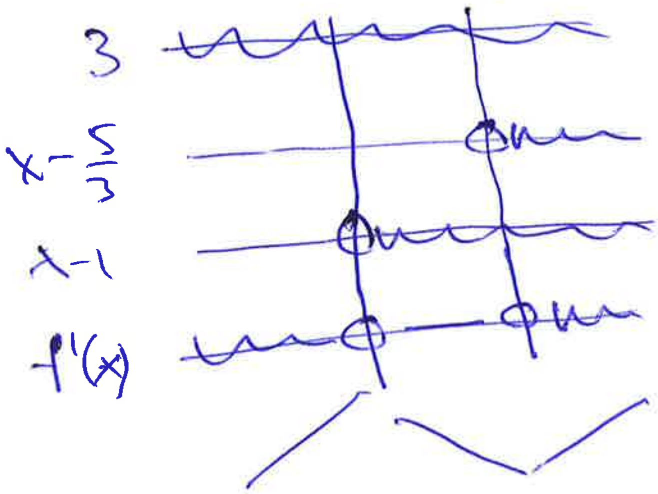
$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

$3x^2 - 8x + 5 = 0$

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{6} = \dfrac{8 \pm 2}{6} = \dfrac{10}{6}, 1$

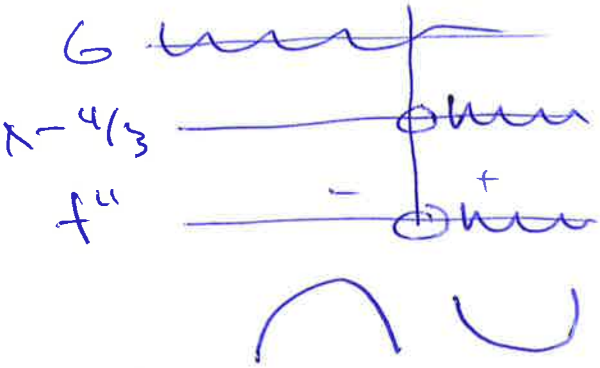
$$f'(x) = 3\left(x - \tfrac{5}{3}\right)(x-1)$$



lokalt maks i $x = 1$

lokalt min i $x = 5/3$

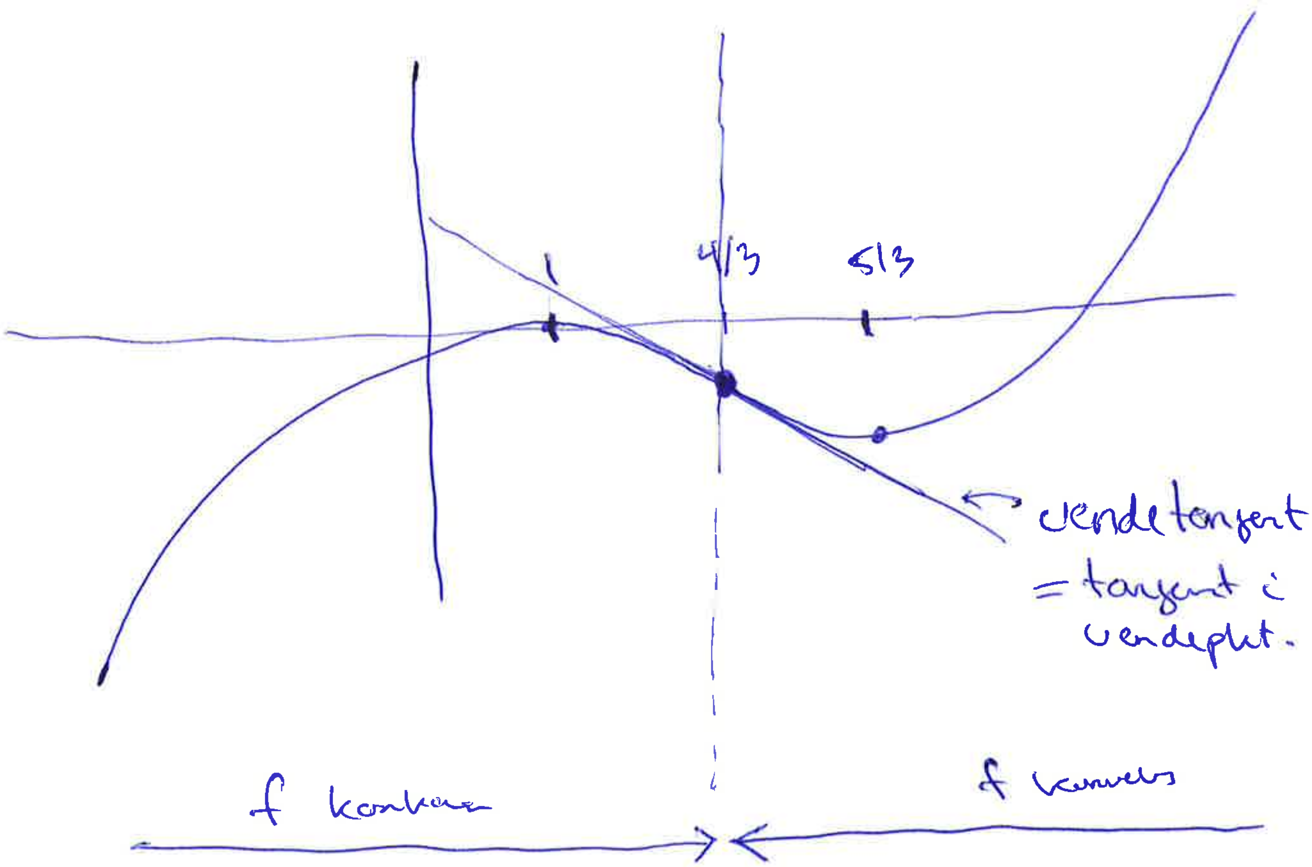
$$f''(x) = 6x - 8 = 6(x - 4/3)$$



$x = 4/3$ vendepkt.

f konveks i $[4/3, \infty)$

konkav $(-\infty, 4/3]$



BI

Defn:

En <u>vendetangent</u> er tangenten i et vendepkt.

Eks: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

Vendepkt: $\underline{x = 4/3}$

Vendetangent: $\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$

ettpunktsformelen
ved $a = 4/3$

$$f(a) = f(4/3) = \ldots$$

$$f'(a) = f'(4/3) = 3 \cdot (4/3)^2 - 8 \cdot (4/3) + 5$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{12}{3} + \frac{15}{3} = \frac{19}{3} \approx \underline{6.33}$$

Siden et <u>vendepkt</u> er et pkt. der $f''(x)$ skifter fortegn, må vi ha

enten $\boxed{\text{i) } f''(x) = 0}$
eller $\boxed{\text{ii) } f''(x) \text{ eksisterer ikke}}$

i ethvert vendepkt.

③ Konvekse og konkave funksjoner

Husk: f konveks $\Leftrightarrow$ f er konveks i D_f

f konkav $\Leftrightarrow$ f er konkav i D_f

globale egenskaper

Eks: $f(x) = x^2 - 10x + 16$ er konveks, ikke konkav

$f''(x) = 2 \geq 0$ for alle x

$f(x) = x^3 - 4x + 1$ er ikke konveks, ikke konkav

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) \geq 0$ for $x \geq 0$

$f''(x) \leq 0$ til $x \leq 0$

Teorem:
Hvis f er konveks, så er alle stasjonære pkt globale minimum.
Hvis f er konkav, så er alle stasjonære pkt globale maksimum.

konveks

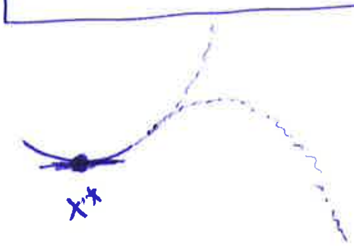
stasjonære pkt

konkav

Annenderivert-testen

Hvis $x = x^*$ er et stasjonært punkt for f,
så har vi:

$$\boxed{\begin{array}{lll} f''(x^*) > 0 & \Rightarrow & x^* \text{ et lokalt min.} \\ f''(x^*) < 0 & \Rightarrow & x^* \text{ et lokalt maks.} \end{array}}$$

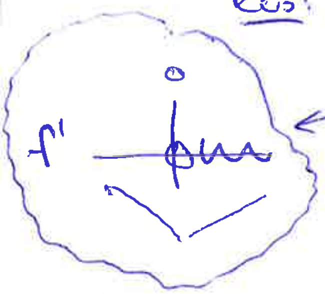


$f''(x^*) > 0$
lokalt min

$f''(x^*) < 0$
lokalt maks

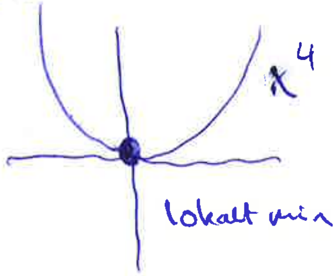
Hva hvis $f''(x^*) = 0$? Kan ikke vite, må bruke en annen metode (fortegnsskjema for f')

Eks:



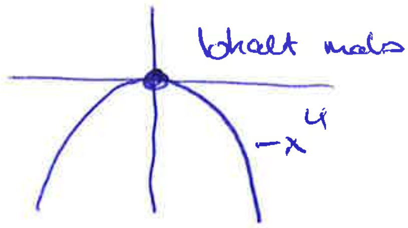
$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$

Stasjonære pkt:
$4x^3 = 0 \quad \underline{x = 0}$
$f''(0) = \underline{0}$



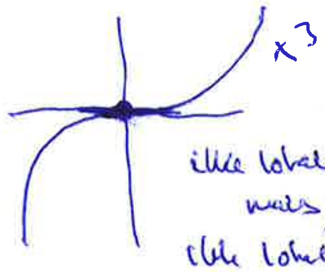
$f(x) = -x^4$
$f'(x) = -4x^3$
$f''(x) = -12x^2$

Stasjonære pkt:
$-4x^3 = 0 \quad \underline{x = 0}$
$f''(0) = \underline{0}$



$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$

Stasjonære pkt:
$3x^2 = 0 \quad \underline{x = 0}$
$f''(0) = \underline{0}$



Eks: $f(x) = x^3 \cdot (x-1)^{2/3}, \quad x \in [-1, 2]$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x-1)^{2/3} + x^3 \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} \cdot 1$$

$$= 3x^2(x-1)^{2/3} + \frac{2x^3}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$$

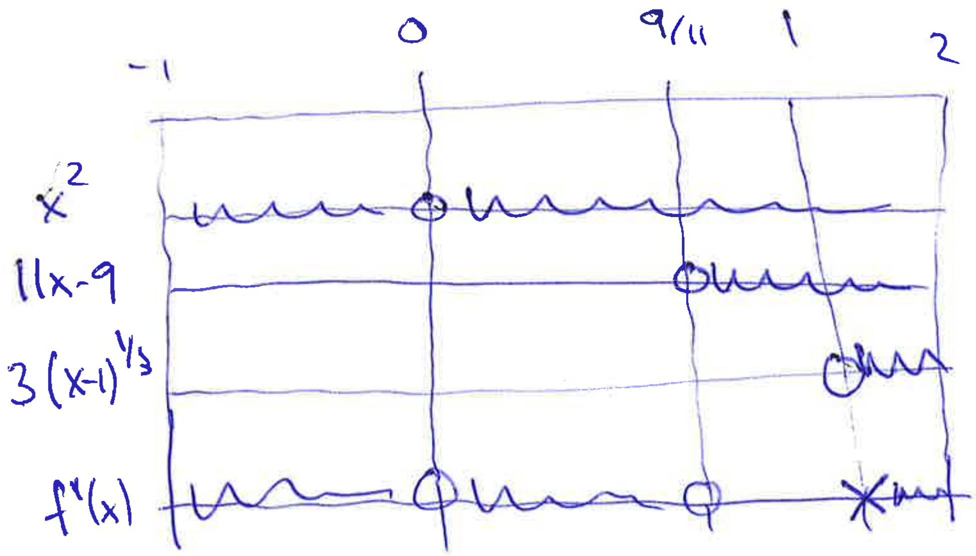
$(x-1)^{2/3} \cdot (x-1)^{1/3}$

1

$$= \frac{9x^2(x-1) + 2x^3}{3(x-1)^{1/3}}$$

$$= \frac{9x^3 - 9x^2 + 2x^3}{3(x-1)^{1/3}} = \frac{11x^3 - 9x^2}{3(x-1)^{1/3}}$$

$$= \frac{x^2(11x-9)}{3(x-1)^{2/3}}$$



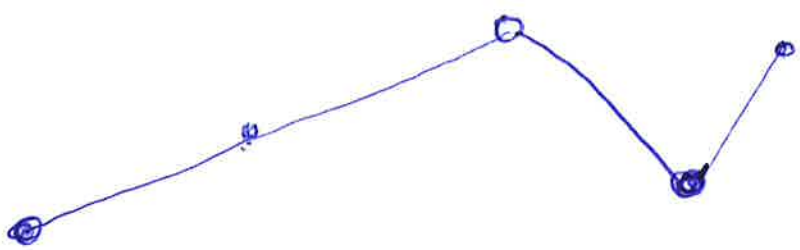
$x = 9/11$: lokalt maks

$x = 1$: lokalt min.

$x = 0$: hverken lokalt maks eller min.

$x = -1$: lokalt min

$x = 2$: lokalt maks



Spørsmål I: Finn maks/min for f.

$$f(x) = x^3 (x-1)^{2/3}$$

Maks: kandidat $x = 9/11$ $\quad f(9/11) < 8$

$x = 2$ $\quad f(2) = 8 \cdot 1 = 8$

Min: 〃 $x = -1$ $\quad f(-1) = (-1)\cdot(-2)^{2/3} = -\sqrt[3]{4}$

$x = 1$ $\quad f(1) = 1^3 \cdot 0^{2/3} = 0$

Pga Ekstremverdisetn. har f et maks og et min. Derfor er

$x = 2$ $\quad f(2) = 8$ $\quad$ maks.

$x = -1$ $\quad f(-1) = -\sqrt[3]{4}$ $\quad$ min

Skisse: