FORELESNING 16

METI180

BI

EIVIND ERIKSEN

JAN 20, 2016

MATEMATIKK

Plan:

1. Repetisjon: Taylorpolynom og Taylorrekker
2. Integrasjon og ubestemte integral
3. Enkle integrasjonsregler
4. Substitusjon

Pensum:

[S] 9.1 – 9.3, 9.5, 9.8

[E] 5.1 – 5.2, 5.3

Eksamen METI1803, Des. 2015 (konte), Oppgave I: $\boxed{\text{gjennomgåes neste uke.}}$

① Repetisjon: $f(x)$ funksjon $x = a$ et pkt.

Taylorpolynom: av grad n

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

$$\simeq f(x) \quad \text{tilnærming til } f(x)$$

Restledd:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

defn. Lagranges restledds-formel for en c mellom a og x

Størrelse på Restledd:

- mindre, jo mindre $|x-a|$ er
- mindre jo større n er ($R_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$) holder for mange funksjoner.

BI

Taylor-rekker:

$$f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = f(x)$$

Likhet gjelder dersom $R_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$

Funksjoner dette gjelder kalles analytiske, det inkluderer

- polynomer
- rasjonale funksjoner
- eksp. / logaritme funksjoner

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{6}\,2} + \dots + \frac{\cancel{n}x^{n-1}}{\cancel{n!}\,(n-1)!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^x$$

$$xe^x = x\cdot\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \dots$$

Potensrekke: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

Eks: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ ← vi kan lage nye funksjoner

Newton's binomialformel:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \quad , \text{der } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = {}_iC_n$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Pascal's trekant.

2 Integrasjon:

Antiderivasjon:

Hvis $f(x)$ er en gitt funksjon, så kalles $F(x)$ en antiderivert til $f(x)$ hvis $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ er en antiderivert til $f(x) = 2x$ siden $(x^2)' = 2x$

$f(x) = x^2 + x + 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ er en antiderivert

Antideriverte funksjoner er <u>ikke entydige</u>!

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2+1)' = 2x + 0 = 2x$$

$$(x^2+C)' = 2x + 0 = 2x \quad \text{når } C \text{ er en konstant.}$$

Resultat:

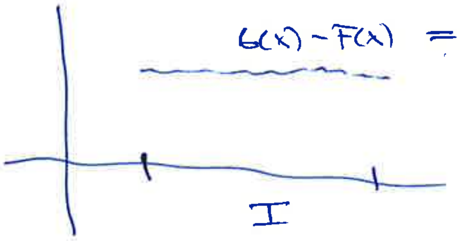
Dersom $f(x)$ er definert på et intervall I og $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så er $F(x) + C$ alle antideriverte funksjoner til $f(x)$ på I.

Bevis:

Hvis $G(x)$ er en annen antiderivert til $f(x)$: $G'(x) = f(x)$

$$\left((G-F)(x)\right)' = \left(G(x) - F(x)\right)' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Det betyr at $G(x) - F(x)$ er en funksjon på et intervall der den derivert $= 0$ i alle pkt.



$$G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C$$

Konklusjon:

Dersom $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så er alle antideriverte til $f(x)$ på formen

$$\boxed{F(x) + C}$$

der C er en hvilken som helst konstant

Uttrykket $F(x)+C$ kalles den generelle antideriverte til $f(x)$.

Skrivemåte: Ubestemt integral

$$\int \underline{f(x)}\, dx = F(x) + C$$

integrasjonstegn

integrand, det som vi skal integrere

dx betyr at x er integrasjonsvariabelen

integrasjonskonstant, ubestemt konstant

Eks: $\int 2x\, dx = x^2 + C$

③ Integrasjonsregler

a) $$\boxed{\begin{gathered}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \text{for alle } n \neq -1\end{gathered}}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$

Eks:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$= \underline{\frac{2}{3}\cdot x^{3/2} + C}$$

b) $$\boxed{\begin{gathered}\int u(x)+v(x)\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx \\ \int u(x)-v(x)\,dx = \int u(x)\,dx - \int v(x)\,dx\end{gathered}}$$

Eks:

$$\int (x^2+1)\,dx = \int x^2 dx + \int 1\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + (x + C_2)$$

$$= \underline{\frac{x^3}{3} + x + C} \qquad C = C_1 + C_2$$

$$\int x^3 - x\,dx = \underline{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C}$$

Husk:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

(fordi $(uv)' = u'v + uv' \neq u'v'$)

c) $$\boxed{\int c\cdot u(x)\,dx = c\cdot \int u(x)\,dx}$$ når c er en konstant

Eks: $$\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx$$
$$= 3\cdot \frac{x^5}{5} + C = \underline{\frac{3}{5}x^5 + C}$$

Eks: Integrasjon av polynomer

$$\int (x^3 + 3x^2 - 4x + 1)\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + x + C$$
$$= \underline{\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + x + C}$$

d) $$\boxed{\begin{aligned}\int e^x\,dx &= e^x + C\\ \int a^x\,dx &= \frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x + C\end{aligned}}$$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x\cdot\ln(a)$

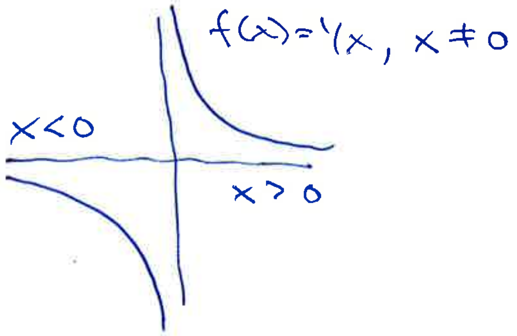
Eks: $$\int 2^x\,dx = \underline{\frac{1}{\ln(2)}\cdot 2^x + C}$$

$(\ln x)' = 1/x$

e) $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$= x^{n} \ (n=-1)$

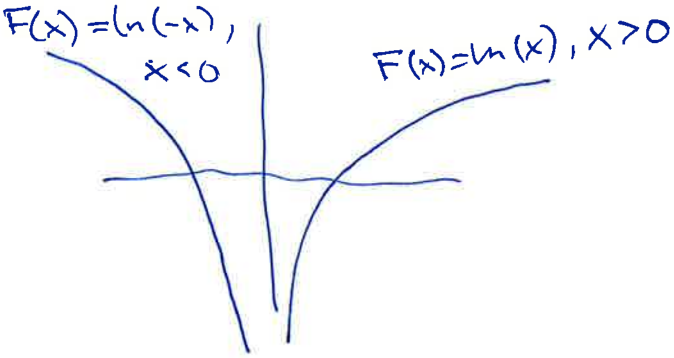
Forklaring: $\ln x + C$ eller $\ln|x| + C$?



Når $x<0$:

$\ln(-x)$ definert når $x<0$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$



$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left\{\begin{matrix} \ln(x), & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{matrix}\right\} + C$$

$$= \begin{cases} \ln(x)+C, & x>0 \\ \ln(-x)+C, & x<0 \end{cases}$$

$$= \underline{\ln|x| + C}$$

Eks: $\int e^{-x^2}\,dx = \ ?$

Ikke mulig å uttrykke ved hjelp av "vanlige funksjoner".

Resultat:

Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på et intervall $I=[a,b]$ så fins en antiderivert $F(x)$ slik at

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Elementære funksjoner = Alle funksjoner vi kan få ved å kombinere

- polynomer
- rasjonale funksjoner
- e^x, $\ln x$
- $\sin x$, $\cos x$
- ~~deres~~ inverse funksjoner

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + x^4/2 - x^6/6 + \dots$$

$$\int e^{-x^2}dx = \int 1 - x^2 + x^4/2 - x^6/6 + \dots \; dx$$

$$= \underbrace{x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5 - \tfrac{1}{42}x^7 + \dots}_{} + C$$

denne kan ikke uttrykkes ved hjelp av "vanlige funksjoner" (den er ikke elementær)

men kan uttrykkes som potensrekke.

4) Integrasjonsteknikk: Substitusjon

Eks: $\int e^{2x}\,dx = \cancel{\int e^u} \cancel{= e^u + C}$

$u = 2x$ $\cancel{= e^{2x} + C}$

$$(e^{2x})' = e^{2x}\cdot 2$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$\int e^{2x}\,dx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \underline{\int \frac{1}{2} e^u\,du}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= u' \cdot dx \\ &= 2dx \end{aligned}}$$

$du = 2dx$

$dx = \frac{du}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{2x} + C}}$$

Sjekk: $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \cdot \cancel{2} = e^{2x}$

Husk:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Kjerneregel for derivasjon:} \\ f(x) = h(u) \text{ med } u = u(x) \\ f'(x) = h'(u)\cdot u'(x) \end{array}}$$

Kjerneregelen "baklengs"

$$\boxed{du = u' \cdot dx}$$

BI

Eks:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$du = u'dx$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{\cancel{1/2}} + C = u^{1/2} + C$$

$$= \underline{\sqrt{x^2+1} + C}$$

<u>Integrasjon ved substitusjon:</u>

i) Velg et variabelskifte $u = u(x)$

ii) Bruk $\boxed{\begin{array}{l} u = u(x) \\ du = u'\,dx \end{array}}$ til å skrive om integralet til formen $\int g(u)\,du$

iii) Løs $\int g(u)\,du$ og skriv svaret ~~[illegible]~~ x. ved hjelp av

<u>Hvordan velger vi u:</u>

- Velg u lik kjernen (indre funksjon i en sammensatt funksjon.
- Velg u heller som en kjerne i nevner enn teller.
- dersom valgt u ikke gir <u>enklere integrasjon</u> prøv <u>noe annet</u>