FORELESNING 17

MET1180 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN

FEB 04, 2016

Plan:

1. Bestemte integral og areal
2. Eksamen MET11803 12/2015 Opgs 2
3. Økonomiske anvendelser

Pensum:

[S] 9.4

[E] 5.6 – 5.7

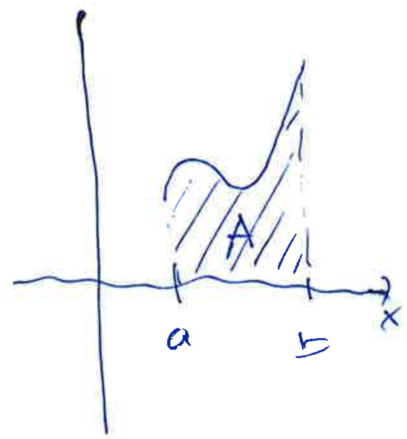
---

1. Bestemte integral og areal

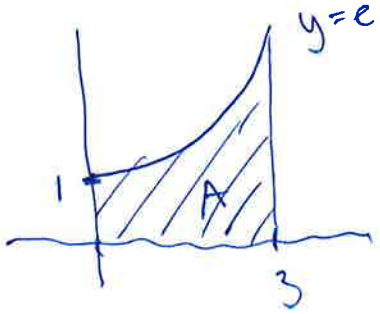
Hvis $f(x)$ er kont. funksjon på $[a,b]$ og $f(x) \geq 0$ i $[a,b]$ så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

der A er areal under grafen til f på $[a,b]$.



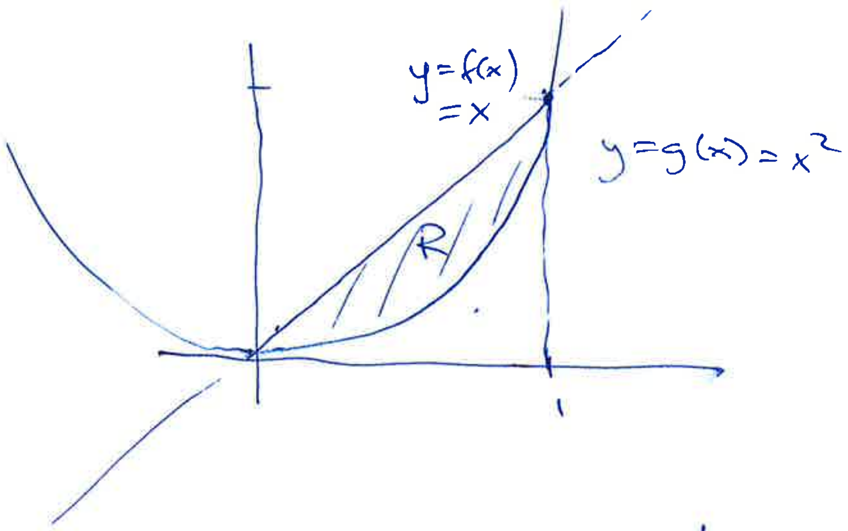
Eks: A = arealet under e^x på $[0,3]$



$$A = \int_0^3 e^x \, dx = \left[e^x \right]_0^3$$

$$= e^3 - e^0 = \underline{\underline{e^3 - 1}}$$

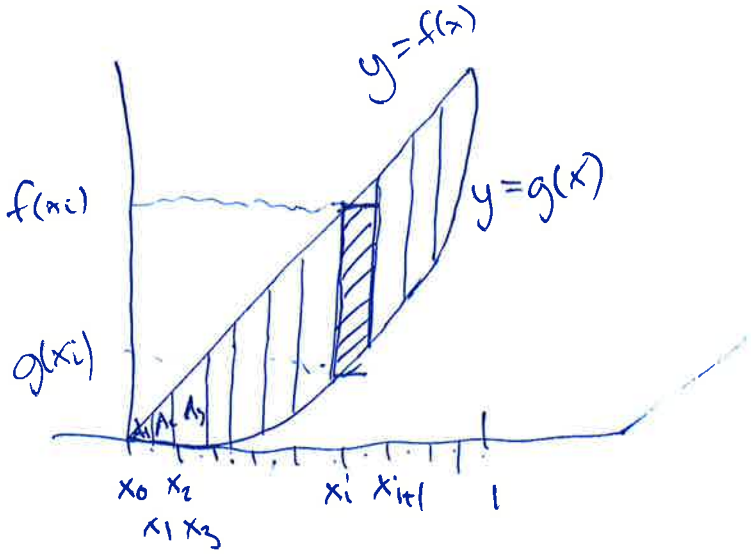
Eks: R: området begrenset av grafene til $f(x)=x$ og $g(x)=x^2$



$$A = A(R) = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$



A = Sum av A_i

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - g(x_i)\right] \cdot \Delta x$$

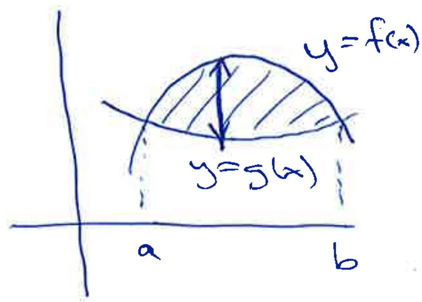
$$\int_0^1 \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Integraltegn $\int$
$= S$
$=$ Sum.

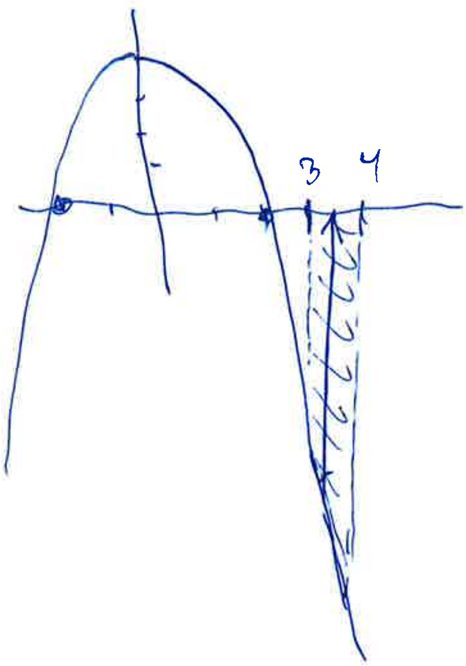
Areal:

Dersom $f(x)$ og $g(x)$ er to kont. funksjoner på $[a,b]$ og $f(x) \geq g(x)$ på $[a,b]$, så er areal av området begrenset av grafen til f og g like:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$



Eks: A = arealet begrenset av grafen til $f(x) = 4 - x^2$ på $[3,4]$ og x-aksen.



$$\int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 4 - x^2\,dx$$

$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_3^4$$

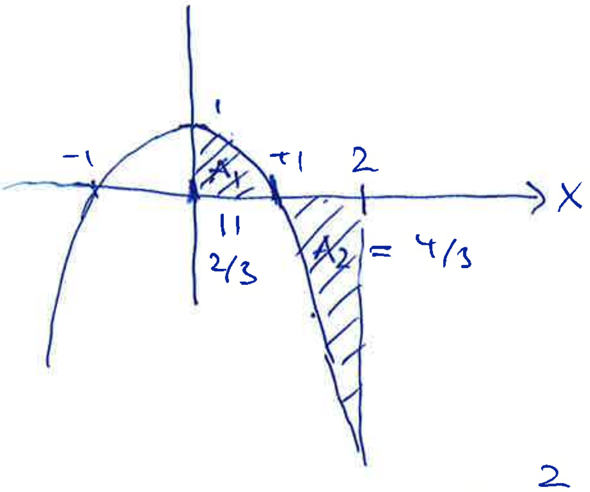
$$= \left(16 - \frac{64}{3}\right) - (12 - 9)$$

$$\simeq 13 - 21{,}333 = \underline{-8{,}33}$$

$$A = \int_3^4 (0 - f(x))\,dx = \int_3^4 -f(x)\,dx$$

$$= -\int_3^4 f(x)\,dx \simeq \underline{8{,}33}$$

Eks: Arealet av området begrenset av $f(x) = 1 - x^2$ og x-aksen på $[0,2]$.



$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 -f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (-1+x^2)\,dx$$

$$= \left[x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-x + \tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$= \left[(1 - 1/3) - 0\right] + \left[\left(-2 + \tfrac{8}{3}\right) - \left(-1 + \tfrac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3} + (-1 + 7/3) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 1 - x^2\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (1-x^2)\,dx$$

$$= A_1 - A_2 = \underline{-2/3}$$

Kan ikke finne $A = A_1 + A_2$ ut i fra dette.

(2) Eks. MET11803 12/15 Opps. 2.

a) $\int x \cdot e^{1-x^2}\,dx = \int \cancel{x} \cdot e^u \cdot \frac{du}{-2\cancel{x}}$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \underline{-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C}$$

Substitusjon:
$u = 1-x^2$
$du = -2x \cdot dx$

~~Delvis:~~
~~$u = \frac{1}{2}x^2$~~
~~$u' = x$~~
~~$v = e^{1-x^2}$~~
~~$v' = e^{1-x^2} \cdot (-2x)$~~

~~$= \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{1-x^2} - \int \frac{1}{2}x^2 e^{1-x^2}(-2x)\,dx$~~

b) $\int x \cdot \ln(1-x)\,dx =$ ~~$\int x \cdot \ln(u)\,\frac{du}{-1}$~~

~~$u = 1-x$~~
~~$du = -dx$~~

~~$= \int (1-u)\ln u\,\frac{du}{-1}$~~

Delvis:

$u = \frac{1}{2}x^2 \qquad v = \ln(1-x)$
$u' = x \qquad v' = \frac{-1}{1-x}$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(1-x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{-1}{1-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1-x}\,dx$$

Polynomdiv: $\cancel{x^2} : (-x+1) = -x-1$

$-(\cancel{x^2} - x)$

$\cancel{x}$

$-(\cancel{x} - 1)$

1

$$\frac{x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Int} = \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2}\int \left(-x - 1 + \frac{1}{1-x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(1-x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x - \ln|1-x|\right) + C$$

c) $$\int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 6}{x^2 - 1}\, dx = \int x+1\, dx + \int \frac{-x-5}{x^2-1} dx$$

$(\cancel{x^3} + x^2 - 2x - 6) : (x^2 - 1) = x + 1$

$-(\cancel{x^3} - x)$

$\cancel{x^2} - x - 6$

$-(\cancel{x^2} - 1)$

$-x - 5$

$$= x + 1 + \frac{-x-5}{x^2-1}$$

$$= x + 1 + \frac{-x-5}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{-x-5}{x^2-1}\,dx$$

BI

$$\frac{-x-5}{(x-1)(x+1)} = \frac{\overset{A=-3}{A}}{x-1} + \frac{\overset{B=2}{B}}{x+1}$$

$$-x-5 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$= \underbrace{(A+B)}_{=-1}x + \underbrace{(A-B)}_{=-5}$$

$$B = -1-A \qquad A-(-1-A) = -5$$

$$\underline{B = 2} \qquad 2A = -6$$

$$\underline{A = -3}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= \underline{\frac{1}{2}x^2 + x - 3 \cdot \ln|x-1| + 2 \cdot \ln|x+1| + C}$$

d) Gjennomgåes neste uke.

3 Økonomiske anvendelser

Eks: Leieinntekter 300 mill. kr / år
øker til 500 — " — om 5 år.

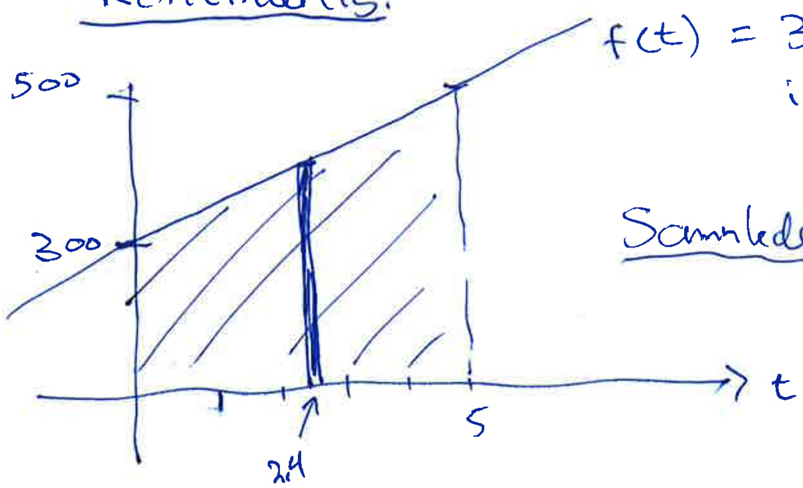
Samlede leieinntekter?
Nåverdi av kontant strøm fra leieinnt.?

Inntektsstrøm: $f(t)$

$$f(t+1)-f(t) = \frac{500-300}{5} = \frac{200}{5} = \underline{40}$$

diskret: leien øker ved årsslutt

Kontinuerlig:



$f(t) = 300 + 40t$
inntektsstrøm (mill kr/år) ved tidspkt. t

Samlede leieinntekter:

$$\int_0^5 (300+40t)\,dt$$

$$= \left[300t + 20t^2\right]_0^5$$

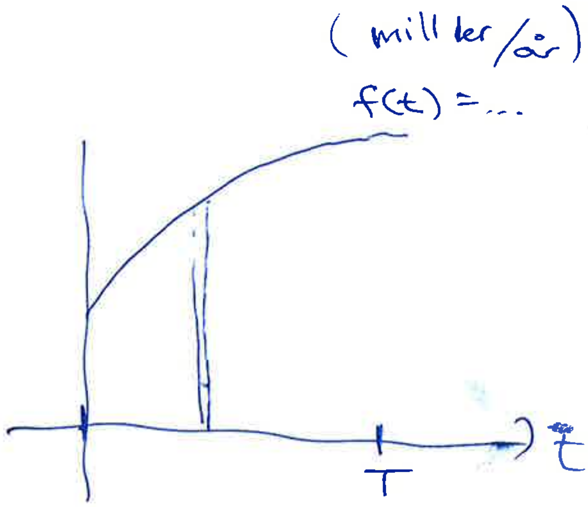
$$= (1500+500) - 0 = \underline{2000}$$

Konklusjon:

Dersom vi har en kontinuerlig betalingsstrøm med rate $f(t)$ i perioden $[0, T]$ så er nåverdien av betalingsstrømmen

$$\int_0^T f(t) e^{-rt}\, dt$$

der r er diskonteringsrenten.



Eks: $r = 8\%$, cbs med $f(t) = 300 + 40t$, $[0, 5]$

Nåverdi: $$\int_0^5 (300+40t) e^{-0,08t}\, dt$$

$$= \ldots$$