FORELESNING 2

MET1180

BI

EIVIND ERIKSEN, AUG 26 2015

MATEMATIKK

Plan:

1. Relativ vekst
2. Potenser og potensregning
3. Renteregning

Pensum:

[S] 1.4, 1.9, 4.1, 5.4
[E] Kap 1.1–1.3

1. Relativ vekst

- Absolutt vekst
- Relativ vekst

Andeler:

Eks: 135 av 250 studenter er jenter

Mellom 0 og 1 / 0% og 100%

Forholdstall: $\frac{135}{250} = \frac{27}{50} = \underline{0{,}54}$

(Som brøk eller desimaltall)

I prosent: $\frac{135}{250} \cdot 100\% = \underline{54\%}$

$0.54 = 54\%$

Endring: (vekst)

Sluttkurs (Norwegian) mandag: 555.25 — Endring: −30.39

$K_0 = 585.64$

$K = 555.25$

Absolutt vekst:

$K_1 - K_0 = -30.39$

Relativ vekst: (Prosentvis vekst)

$$\frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{\Delta K}{K_0}$$

"delta" K = endring i K

BI

Eks: $\frac{-30.39}{585.64} = -5.2\%$
(relativ endring)

$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{K_1 - K_0}{K_0}$$

kan være negativ, eller større enn 100%

Hvis $r = \frac{\Delta K}{K_0}$ er relativ endring i K, kalles $1+r$ vekstfaktoren

Eks: En ~~vare~~ pris øker med 10%, deretter settes prisen ned med 40%. Hva er total prisendring?

$r_1 = 10\%$ → Vekstfaktorene: $1+r_1 = 1,10$

$r_2 = -40\%$ $\quad 1+r_2 = 0,60$

Total prisendring:

Vekstfaktoren $(1+r_1)\cdot(1+r_2) = 1,10 \cdot 0,60$
$= 0,66 = 1 - 34\%$

↓

Total prisendring: -34%

Regning med vekstfaktorer

Dersom en størrelse K har startverdi K_0 og endres gjentatte ganger med relative vekstrater $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, da er

$$K = K_0 \cdot (1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot \ldots \cdot (1+r_n)$$

Eks: $K_0 = 100 \xrightarrow[+10\%]{} 100+10=110 \xrightarrow[-40\%]{} 110 - 110 \cdot 40\%$

$= 110 - 44$

$= 66$

Abs. endring: $+10 - 44 = -34$

Rel. endring: $(1+10\%) \cdot (1-40\%) - 1 = \underline{-34\%}$

Relativ endring: $r = \dfrac{\Delta K}{K_0} = \dfrac{K-K_0}{K_0} \quad | \cdot K_0$

$$rK_0 = K - K_0$$

$$K = rK_0 + K_0$$

$$\underline{K = K_0 \cdot (1+r)}$$

② Potenser

a : grunntall
n : eksponent

BI

Definisjon I:

(n positivt heltall)

$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$$

Eks: $2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8$

Regneregler:

i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

ii) $a^n : a^m = a^{n-m}$

iii) $(a^n)^m = a^{nm}$

iv) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

v) $a^n : b^n = (a/b)^n$

Eks: $2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ g.}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ g.}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{3+4=7 \text{ g.}} = 2^7$

$$\frac{2^4}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2 \cdot 2}}{\cancel{2 \cdot 2}} = 2^2$$

$$(1{,}03^{12})^4 = \underbrace{1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot \ldots \cdot 1{,}03}_{12 \text{ g.}} \cdot \underbrace{1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot \ldots \cdot 1{,}03}_{12 \text{ g.}}$$

$$\cdot \underbrace{1{,}03 \cdot \ldots \cdot 1{,}03}_{12 \text{ g.}} \cdot \underbrace{1{,}03 \cdot \ldots \cdot 1{,}03}_{12 \text{ g.}}$$

$$= 1{,}03^{4 \cdot 12} = \underline{1{,}03^{48}}$$

Definisjon 2:

Når $a \neq 0$ så definerer vi:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad \dots \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

når $n = 1, 2, \dots$

Eks: $1{,}04^{-3} = \dfrac{1}{1{,}04^3}$

Dette er et valg, og det eneste som er slik at regnereglene gjelder.

$$\frac{2^4}{2^4} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 1$$

$$\| \quad 2^{4-4} = 2^0$$

$$\frac{1{,}04^3}{1{,}04^6} = \frac{1{,}04\cdot 1{,}04\cdot 1{,}04}{1{,}04\cdot\ldots\cdot 1{,}04}$$

$$= \frac{1}{1{,}04\cdot 1{,}04\cdot 1{,}04}$$

$$= 1{,}04^{3-6} = 1{,}04^{-3}$$

Definisjon 3:

Hvis $a > 0$, så definerer vi

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}$$

når $x = m/n$ er et rasjonalt tall (m, n heltall, $n \neq 0$).

Eks: $2^{0.5} = 2^{1/2} = \underline{\sqrt{2}} \simeq 1{,}414\ldots$

$$2^{1,7} = 2^{17/10} = \sqrt[10]{2^{17}}$$

Tilnærmingsverdi

2 $\cancel{\boxed{}}$ 1.7

$\boxed{y^x}$

$$\left(2^{1/2}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 2^1 = 2 \implies 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

eneste mulighet (positiv) s.a. regnereglene gjelder

$$\left(2^{17/10}\right)^{10} = 2^{\frac{17}{10}\cdot 10} = 2^{17}$$

$$\Downarrow$$

$$2^{1.7} = \sqrt[10]{2^{17}}$$

Eks: $(-1)^{2/3} = \left((-1)^2\right)^{1/3} = 1^{1/3} = \sqrt[3]{1} = 1$

$(-1)^{3/2} = \left((-1)^3\right)^{1/2} = \sqrt{-1}$ ikke definert

Eks:

$$x = 4\cdot\sqrt[3]{x}$$

$$x = 4\cdot x^{1/3} \quad | : x^{1/3}$$

$$\frac{x}{x^{1/3}} = 4$$

$$x^{1-1/3} = 4$$

$$x^{2/3} = 4 \quad | \wedge(3/2) \qquad \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x^1 = x$$

$$x = 4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \underline{8}$$

$\underline{x=0:}$ VS: 0 HS: $4\cdot\sqrt[3]{0} = 0$ } ok $x=0$

} $x=0$ eller $x=8$

Konsekvens:

Regneregler for røtter: { n positivt heltall, $a, b > 0$

i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

ii) $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$

i) $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}\cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

Definisjon 4:

Hvis $a > 0$ og x er et irrasjonalt tall, definerer vi

a^x = grenseverdien av a^{x_n} når n blir større og større, når x_n betyr tiln. verdi for x med n desimaler

Eks: $2^\pi = ?$

$\pi = 3{,}14159265\ldots$ irrasjonalt tall

$$2^{3,14} = 2^{314/100} = \sqrt[100]{2^{314}} \simeq 8.815$$

$$2^{3,141} = \sqrt[1000]{2^{3141}}$$

$$2^{3,1415} = \sqrt[10.000]{2^{31415}}$$

$\vdots$

$\downarrow$

$$2^\pi \simeq 8.825$$

La x_n være tallet som består av heltalls-delen til x og de første n desimalene. Da er

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$$

for $a > 0$.

BI

③ Renteregning

<u>Eks:</u> En bank-kto. gir 3% rente per år. Etter 5 år er 1000 kr vokst til:

$$1000 \cdot 1{,}03^5 = 1159{,}27$$

$1{,}03 \ \boxed{y^x}\ 5 \cdot 1000$

$1000 \cdot 1{,}03 \ \boxed{y^x}\ 5$

<u>Rente</u> $\quad r = 3\% \longrightarrow$ Vekstfakt $1+r = 1{,}03$

<u>Kapitalisering</u>: Tidspunkt når rente legges til balansen

$$1000 \xrightarrow[+3\%]{} 1030 \xrightarrow[+3\%]{} 1000 + 30 \cdot 2 + 0{,}90 = 1060{,}90$$

$$1000 \cdot 1{,}03^2$$

<u>Rentetermin</u>: Perioden mellom hver ~~periodisering~~ kapitalisering.

Eks: En bank-kto gir 0.5% rente per mnd, med mnd. kapitalisering.

I løpet av ett år vil 1000 kr vokse til:

Rentetermin = 1 mnd

↓

Vi bruker ~~mnd~~"s-rente (månedsrente)

$$1000\,(1+0.5\%)^{12} = 1000 \cdot 1{,}005^{12}$$
$$\simeq \underline{1061{,}68}$$

Nominell rente: $12 \times 0.5\% = \underline{6\%}$

Effektiv rente: $1{,}005^{12} \simeq 1{,}06168$

$1{,}005^{12} - 1 \simeq 0{,}06168$

$\simeq 6{,}2\%$

Effektiv rente er ca $\underline{6.2\%}$

~~Når renten er r%~~

Effektiv rente:

Når terminrenten er r og det er n terminer per år, så er effektiv rente

$$r_{eff} = (1+r)^n - 1$$

Eks: Hva gir best avkastning, en rente på 5% som kapitaliseres årlig, eller 4.8% — " — månedlig.

BI

a) Termin: Et år

Vekstfaktor 1,05

Eff. rente: 5%

b) Termin: mnd

Vekstfaktor: $1{,}004^{12}$

Rente per mnd:

$$\frac{4.8\%}{12} = 0.4\% \text{ per mnd.}$$

Nominell rente: 4.8%

Månedsrente: $\frac{4.8\%}{12} = 0.4\%$

Effektiv rente:

$$1{,}004^{12} - 1$$

$$\simeq 1{,}0490 - 1$$

$$\simeq 4.9\%$$

Formel for regning med terminrente:

Dersom årlig nominell rente er r, og det er n rentetermin per år, så vil balansen øke fra B_0 til

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

i løpet av ett år, og

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nN}$$

i løpet av N år.