FORELESNING 20

MET1180

BI

EIVIND ERIKSEN FEB 10, 2016 MATEMATIKK

Plan:

1. Oppgaver integrasjon
2. Likningssystemer
3. Lineære systemer

Pensum:

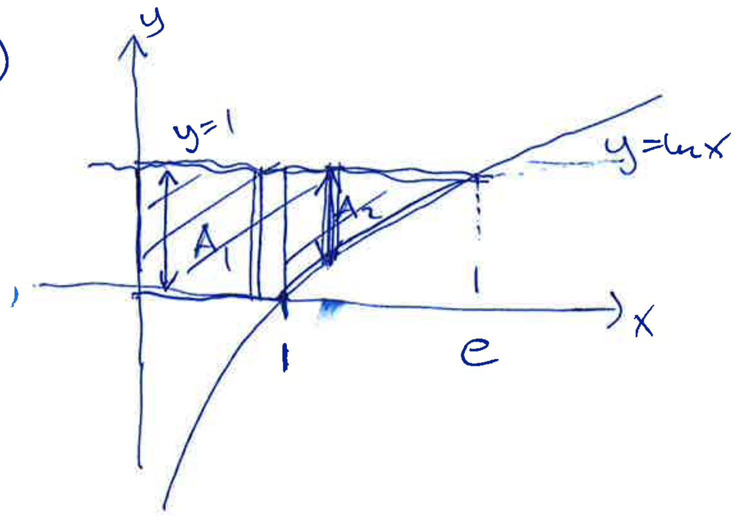
[S] 1.7–1.8, 10.1

[E] 6.1–6.2

---

1 Eksamen MET11803, 12/2015 Opps. 2

d)



$\ln x = 0$

$\underline{x = 1}$

$\ln x = 1$

$x = e^1 = e$

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (1-0)\,dx + \int_1^e (1-\ln x)\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx + \Big[x - (x\ln x - x)\Big]_1^e$$

$$= \Big[x\Big]_0^1 + \Big[e - e\ln e + e\Big] - \Big[1 - 1\cdot\ln 1 + 1\Big]$$

$$= 1 + 2e - e - 2 = \underline{\underline{e-1}}$$

$u = x \quad v = \ln x$

$u' = 1 \quad v' = 1/x$

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx$$

$$= u\cdot v - \int u v'\,dx$$

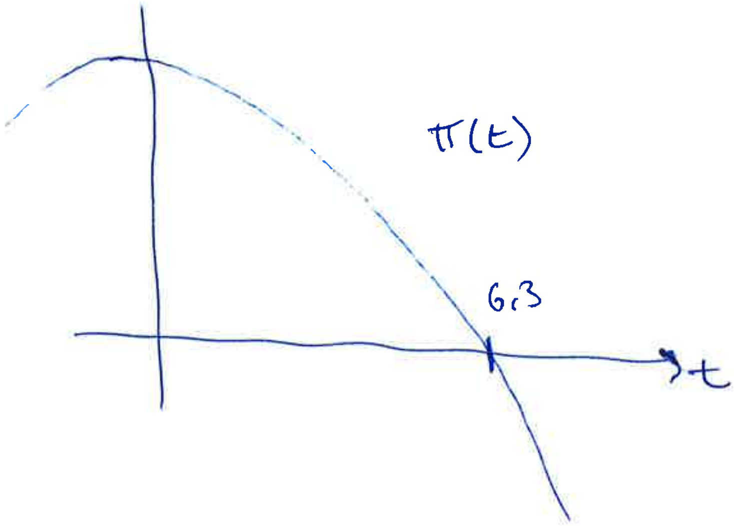
$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\cdot\ln x - x + C$$

9.38.

a) $\pi(t) = i(t) - u(t)$

$= (100 - t^2) - (28 + 5t) = 72 - 5t - t^2$



$\pi(t) = 0$

$72 - 5t - t^2 = 0$

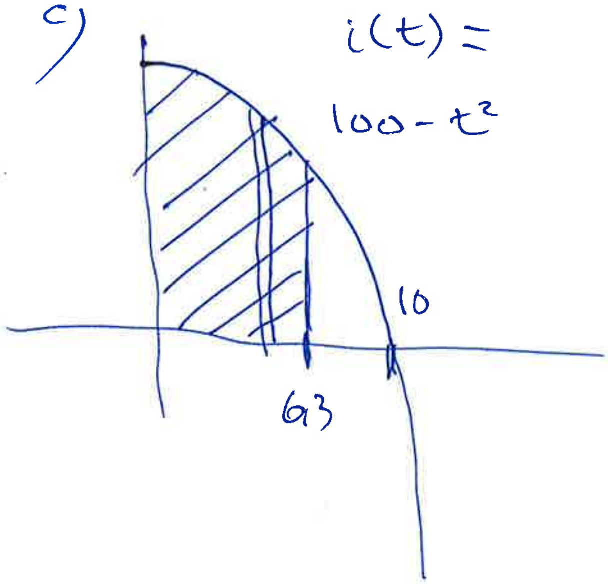
$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 72}}{-2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{313}}{-2}$$

b) $$t = \frac{5 - \sqrt{313}}{-2} = \frac{\sqrt{313} - 5}{2}$$

$$\simeq 6{,}3$$

c) $i(t) = 100 - t^2$



Totale inntekter:

$$\int_0^{6{,}3} (100 - t^2)\, dt \qquad \frac{\sqrt{313}-5}{2} \simeq 6{,}3$$

$$= \left[100t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^{6{,}3}$$

$$= 100 \cdot 6{,}3 - \frac{(6{,}3)^3}{3} \simeq 549{,}4$$

② Likningssystemer

En eller flere likninger i én eller flere variabler.
= Likningssystem.

Eks: $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

Løsninger av likningssystemet: Tallpar (x,y) som tilfredsstiller alle likn. samtidig.

Innsettingsmetoden:

$x+y=4 \Rightarrow \boxed{y=4-x}$

$x^2+y^2 = x^2+(4-x)^2 = 10$

$x^2+16-8x+x^2=10$

$2x^2-8x+6=0$

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-4\cdot 2\cdot 6}}{4} = 2 \pm 1$

$x=3$ eller $x=1$

$y=1$ $\qquad$ $y=3$

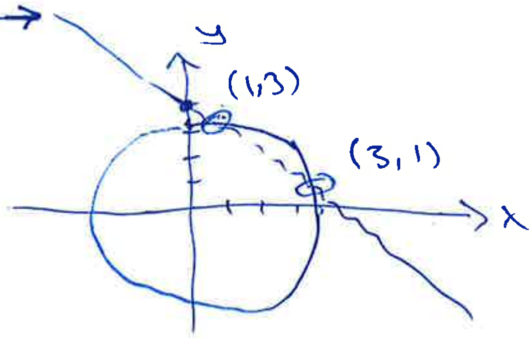
Løsn: $(x,y) = (3,1), (1,3)$

Viktig: Bruk den enkleste likningen først.

Vær systematisk.

Geometrisk løsning:

Eks:
$$x + y = 4$$
$$x^2 + y^2 = 10$$



$x + y = 4$ lineær (rett linje)

$y = 4 - x = -x + 4$

$x^2 + y^2 = 10$ sirkel
senter i $(0,0)$ radius $= \sqrt{10} \simeq 3.1$

Skjæringspkt = løsning av likn.-systemet.

Eks:
$$4x^3 - z = 0$$
$$x + y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x - z}$$
$$x - 4z^3 = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4x^3 - z = 0 \\ x - 4z^3 = 0 \end{array}} \Rightarrow \boxed{z = 4x^3}$$

$\Downarrow$

$$x - 4\cdot(4x^3)^3 = 0$$

$$x - 4\cdot 4^3\cdot x^9 = 0$$

$$x(1 - 4^4\cdot x^8) = 0$$

$\underline{x=0}$ eller $1 - 4^4\cdot x^8 = 0$

$$x^8 = 1/4^4 = 1/256$$

$$x = \pm\sqrt[8]{1/256}$$

$$= \pm\sqrt[8]{\frac{1}{4^4}} = \pm\sqrt[8]{\frac{1}{2^8}}$$

$$= \pm 1/2$$

$\underline{x=1/2}$ eller $\underline{x=-1/2}$

$$\left.\begin{array}{l} z = 4x^3 \\ y = -x-z \end{array}\right\}$$

$\underline{x=0} \Rightarrow z=0 \Rightarrow y=0$

$\underline{x=1/2} \Rightarrow z = 4\,1/8 = \underline{1/2} \Rightarrow \underline{y=-1}$

$\underline{x=-1/2} \Rightarrow z = 4\cdot -1/8 = \underline{-1/2} \Rightarrow \underline{y=1}$

<u>Løsn:</u> $\underline{\underline{(0,0,0),\ (1/2,-1,1/2),\ (-1/2,1,-1/2)}}$

(3) Lineære likningssystem:

Et likningssystem er lineært hvis alle likningene er lineære.
Gjerne mange likninger og mange ukjente.

Vanlig skrivemåte: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (for de ukjente)

lineært likningssystem
=
Et $m \times n$ lineært system: m likninger, n ukjente

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

a_{ij} : koeff. foran x_j i likn. i (tall)
b_i : konstantleddet i likn i (tall)

Eks:
$$
\begin{aligned}
x + y &= 4 \\
x - y &= 2
\end{aligned}
$$
2×2 lineært system

Eks:
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 \qquad &= 4
\end{aligned}
$$
2×3 lineært system

Løsning av lineære system:

- innsettingsmetoden
- elimineringsmetoden ←

Skal gå gjennom:

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gauss-eliminasjon} \\ \text{Gauss-Jordan eliminasjon}\end{array}}$

Eks:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \\ \hline 2x \quad &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad \leftarrow \quad \begin{aligned} 3 + y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Løsn: $(x, y) = (3, 1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x \quad &= 6 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Koeff. matrisen:

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

↑ koeff. foran x

↑ " " y

Utvidet koeff. matrise

Eks: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Lovlige operasjoner:

Defn: Lovlig operasjon = operasjon som bevarer løsningen i likn.systemet.

Elementære radoperasjoner: Lovlige operasjoner på utvidede koeff.matriser.

En rad = en likning

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x+2y+4z&=7 \\ x+3y+9z&=13 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

Elementære radoperasjoner:

1. Bytte om to rader
2. Multiplisere én rad med et tall $\neq 0$
3. Legge til et multippel av en rad til en annen rad.

* lovlige operasjoner

* nok til å løse alle lineær system

Eks:

$$2x + 3y = 7$$
$$3x - y = 4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)$$

legg til

Ønsker å eliminere x fra likning 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \quad R1 \quad \downarrow \cdot(-3/2)$$

$$-\tfrac{3}{2}\cdot R_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -4.5 & -10.5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5.5 & -6.5 \end{array}\right) \qquad R2 := R2 - \tfrac{3}{2}\cdot R_1$$

Skrivemåte:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5.5 & -6.5 \end{array}\right)$$

elementær radop. av type (3)
elimineres x fra likn 2

Løsn:

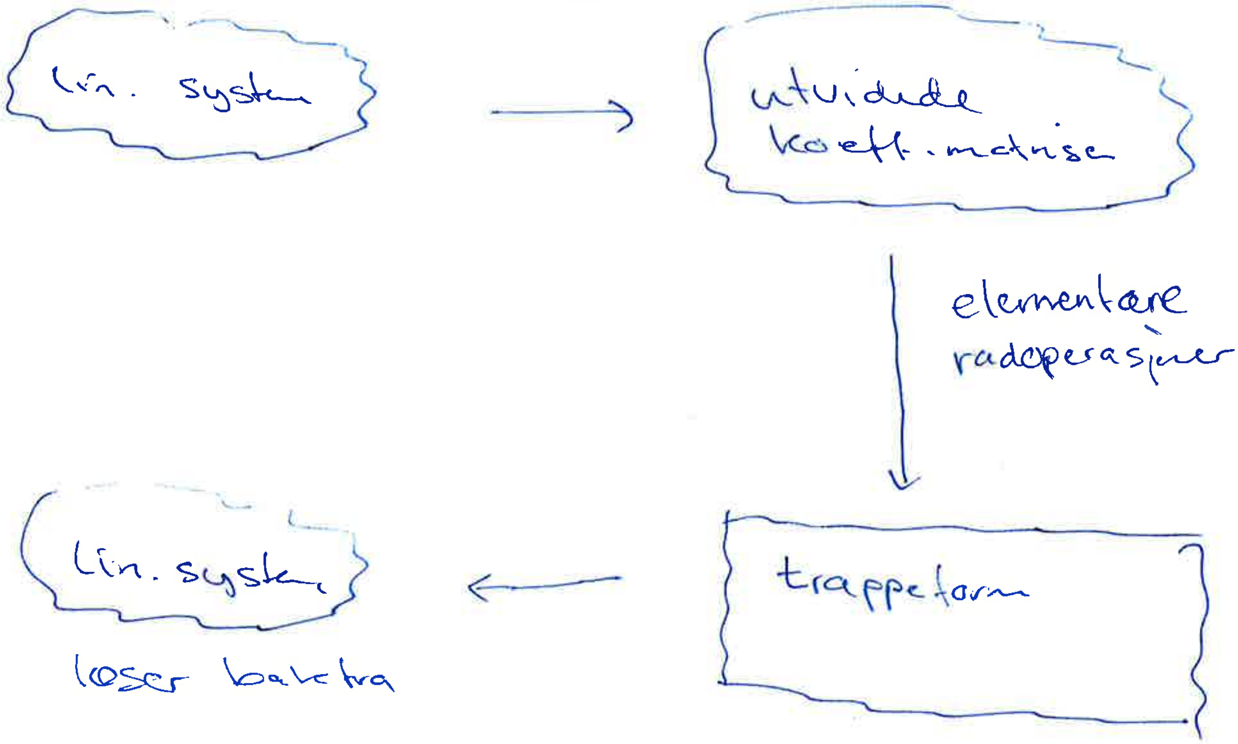
$$2x + 3y = 7$$
$$-5.5y = -6.5 \Rightarrow y = \frac{-6.5}{-5.5} = \underline{\frac{13}{11}}$$

$$2x + 3\cdot\frac{13}{11} = 7$$

$$2x = 7 - \frac{39}{11} = \frac{77 - 39}{11} = \frac{38}{11}$$

$$x = \frac{38}{11\cdot 2} = \underline{\frac{19}{11}} \qquad (x, y) = \underline{\underline{\left(\frac{19}{11}, \frac{13}{11}\right)}}$$

Gauss - eliminasjon



Eks:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \\
x + 2y + 4z &= 7 \\
x + 3y + 9z &= 13
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ ]\,-1 \\ \;]\,-1 \end{array}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ ]\,-2 \end{array}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{x} + y + z &= 3 \\
\underline{y} + 3z &= 4 \\
\underline{2z} &= 2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x &= 3 - 1 - 1 = \underline{1} \\
y &= 4 - 3\cdot 1 = \underline{1} \\
z &= \underline{1}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)
$$

trappeform!

Løsn: $(x, y, z) = \underline{\underline{(1, 1, 1)}}$

Løser bakfra, for variablene med strek under - svarer til koeff. med ring.