FORELESNING 21

MET 1180 MATEMATIKK BI

Eivind Eriksen, Feb 17 2016

Plan:

1. Lineære systemer og Gauss-eliminasjon
2. Systemer med ingen eller uendelig mange løsninger.
3. Variant: Gauss-Jordan eliminasjon

Pensum:

[S] 10.1
[E] 6.2-6.3

1. Lineære systemer og Gauss-eliminasjon

Et $m \times n$ <u>lineært system</u> er et likningssystem med m lineære likninger i variablene $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

a_{ij}: koeff. i rad i kol. j

posisjon (i,j)

Koeff. matrisen og den utvide koeff. matrisen til det lineære systemet

Koeff. matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ - matrise

Utvidet matrise

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$m \times (n+1)$ - matrise

Elementære radoperasjoner på matriser:

Operasjoner på utvidede koeff. matriser.

1. Bytte om to rader
2. Multiplisere en rad med et tall $\neq 0$.
3. Legge til et multippel av en rad til en annen rad.

* Elementære radoperasjoner bevarer løsningene til det lineære systemet. ("lovlig operasjon")

Trappeform

En ledende koeffisient i en rad er det første tallet i raden $\neq 0$.

Eks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Matrisen er på trappeform hvis følgende betingelser er oppfyllt:

1. Alle rader som kun består av null står nederst i matrisen
2. Alle tall under en ledende koeff. er 0.

En pivot-posisjon er en posisjon i matrisen der trappeformen har en ledende koeff. (pivot = ledende koeff.)

Eks:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x - y - z &= -1 \\ 4x + 2y - 7z &= -8 \end{aligned}\right\}$$ 3x3 lineært system

Utvidet matrise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & -8 \end{array}\right) \cdot (-2)$$

$R_2 \leftarrow R_2 + \underbrace{(-2)\cdot R_1}_{(-2 \; -4 \; -2 \,|\, -10)}$

Ønsker å få null

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 4 & 2 & -7 & -8 \end{array}\right) \cdot (-4)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -28 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot 6 \\ \cdot 5 \end{array}$$

Alt. 1

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -30 & -18 & -66 \\ 0 & -30 & -55 & -140 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

Ønsker å få null

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -30 & -18 & -66 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{array}\right)$$

trappeform

(pivot-posisjoner)

Alt. 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -28 \end{array}\right) \cdot (-6/5)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

$-11 + (-3)\cdot(-6/5)$
$= -11 + 18/5$
$= -\frac{55}{5} + \frac{18}{5} = \frac{-37}{5}$

$-28 - 11\cdot(-6/5)$
$= -28 + 66/5$
$= -\frac{140}{5} + \frac{66}{5}$
$= \frac{-74}{5}$

$$\parallel$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -37/5 & -74/5 \end{array}\right)$$

Resultat:

Enhver matrise kan gjøres om til en trappeform v.h.a. elementære radoperasjoner.

Trappeformen er ikke entydig, men pivot-posisjonene er entydige.

Gauss-eliminasjon:

1. Finn den utvidede matrisen til systemet
2. Finn en trappeform av matrisen v.h.a. elementære radoperasjoner.
3. Finn løsningene v.h.a. baklengs substitusjon.

Eks:

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 5 \\ 2x-y-z &= -1 \\ 4x+2y-7z &= -8 \end{aligned} \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & -8 \end{array}\right)$$

(2) elementære radoperasjoner

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 5 \\ -30y-18z &= -66 \\ -37z &= -74 \end{aligned} \xleftarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -30 & -18 & -66 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array}$$

a) $-37z=-74 \Rightarrow z=\frac{-74}{-37}=\underline{2}$

b) $-30y-18\cdot 2=-66 \Rightarrow -30y=-30 \Rightarrow y=\underline{1}$

c) $x+2\cdot 1+2=5 \Rightarrow x=\underline{1}$

Løsning: $(x,y,z)=\underline{(1,1,2)}$

(2) Lineære system med ingen eller uendelig mange løsninger.

BI

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x-y+z&=1 \\ x+5y+z&=6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ -2y&=-2 \\ 0&=-1 \end{aligned}$$

ingen løsninger

(inkonsistent)

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x-y+z&=1 \\ x+5y+z&=7 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ -2y&=-2 \end{aligned}$$

Baklengs: $y=1$

$x+1+z=3 \Rightarrow x=2-z$

$x=2-z$

$y=1$

$z=$ fri variabel.

Resultat:

a) Systemet er <u>inkonsistent</u> (ingen løsninger) hvis og bare hvis den siste kolonnen har en pivot-posisjon.

b) Hvis systemet er <u>konsistent</u> (minst én løsning), altså at det ikke er en pivot-posisjon i siste kolonne, så:

avhengig variabel:	pivot-posisjon i tilsv. kolonne
fri variabel:	<u>ikke</u> pivot-posisjon i sin kolonne

<u>Antall frihetsgrader</u> = antall fri variable

Ingen frihetsgrader: <u>én</u> løsning
Minst én frihetsgrad: <u>uendelig</u> mange løsninger

<u>Eks.</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

<u>Ingen</u> løsning

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Konsistent</u> (minst én løsn.)

Avhengige: x, y
Fri : z

Antall frihetsgrader: 1

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ -2y &= -2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &y = 1 \\ &x + 1 + z = 3 \Rightarrow x = 2 - z \end{aligned}\right\} \quad z \text{ fri}$$

$z = 1$: $x = 1$, $y = 1$ $\Rightarrow$ $(1, 1, 1)$
$z = 2$: $x = 0$, $y = 1$ $\quad (0, 1, 2)$
⋮

Skrivemåte for løsningene:

$x = 2 - z$
$y = 1$
$z = z$ (fri variabel)

$(x, y, z) = \underline{\underline{(2-z, 1, z)}}$ med z fri

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2-z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}}} \qquad \text{— " —}$$

3 Variant: Gauss-Jordan eliminasjon

Redusert trappeform

En matrise er på redusert trappeform hvis

i) den er på trappeform
ii) alle ledende koeff. er 1
iii) alle tall over en ledende koeff. er 0

Resultat:

Alle matriser kan gjøres om til en redusert trappeform v.h.a. elementære radoperasjoner. Den er entydig.

Eks:

$$x + y + z + w = 7$$
$$x - y + 2z - w = 3$$

(2×4)

BI

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

uendelig mange løsn.

trappeform

$$\downarrow$$

ansker null

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$x + y + z + w = 7$$
$$-2y + z - 2w = -4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

redusert trappeform

$$x + \tfrac{3}{2}z = 5$$
$$y - \tfrac{1}{2}z + w = 2$$

$$x = 5 - \tfrac{3}{2}z$$
$$y = 2 + \tfrac{1}{2}z - w$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3/2\, z \\ 2 + 1/2\, z - w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eks:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 10 \\ 2x + 6y &= 20 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & 20 \end{array}\right) \; -2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

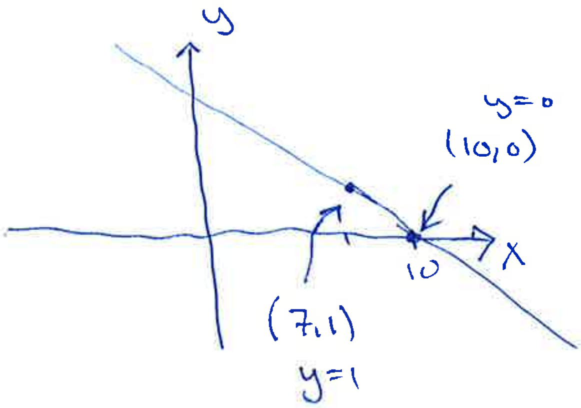
y fri
uendelig mange løsn.

$$\boxed{x + 3y = 10}$$

$x = 10 - 3y$
y er fri

Løsn: $(x, y) = (10 - 3y, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 3y \\ y \end{pmatrix}$$



Løs for y:

$$3y = 10 - x$$

$$y = \frac{10 - x}{3} = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x$$

rett linje
Stign.tall: $-1/3$
Skj. m/ y-aksen: $10/3$

* Antall frihetsgrader = dimensjonen til løsningsrommet
  1 fri $\Rightarrow$ linje (1-dim.)
  2 fri plan (2-dim.)

* Med Gauss / Gauss-Jordan blir y fri, x avhengig
  Men det er også mulig å velge x fri, y avhengig.