FORELESNING 22

MET1180 BI

MATEMATIKK

Eivind Eriksen, Feb 24 2016

Plan:

1. Repetisjon: Antall løsn. av lineære system.
2. Determinanter
3. Cramers regel.

Pensum:

[S] 10.7 – 10.8

[E] 6.4

---

1 Repetisjon: Lineære systemer og Gauss-eliminasjon

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 7 \\ x-y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= 16 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

utvidet matrise

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \tfrac{1}{2} \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

trappeform

Baklengs substitusjon

$$\begin{aligned} x+y+z &= 7 & \quad x&=1 \\ -2y &= -6 & \quad y&=3 \\ 2z &= 6 & \quad z&=3 \end{aligned}$$

Antall løsninger:

Pivot-posisjonene i den utvidede matrisen bestemmer antall løsninger:

i) Hvis det er en pivot-posisjon i siste kolonne, så er systemet inkonsistent (ingen løsninger)

ii) Hvis det ikke er en pivot-posisjon i siste kolonne, så er systemet konsistent (minst én løsning)

a) Om det er en pivot-posisjon i hver av variabel-kolonnene, så har systemet én løsning

b) Om det er minst én variabel-kolonne som mangler pivot-posisjon, så er det uendelig mange løsninger

(variabler uten pivot-posisjon = frie)

Eks: Vi har et 3×5 lineært system. Hvor mange løsninger har systemet?

$$\text{3 lign.}\left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{array}\right)}_{\text{5 ukjente}} \right. \longleftarrow \text{en mulighet for pivot-posisjonene}$$

2 frie variable, uendelig mange løsn.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \end{array}\right) \longleftarrow \text{en annen mulighet, ingen løsn.}$$

kan ikke ha eksakt én løsn.

② Determinanter.

En $m \times n$-matrise A er rektangulær blokk med tall (m rader, n kolonner):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tallet i matrisen A i posisjon $(2,1)$: dvs rad 2, kolonne 1

En matrise er kvadratisk hvis $m = n$, dvs like mange rader som kolonner.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x - y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 16 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

koeff.matrisen er kvadratisk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \quad 3 \times 4$$

utvidet matrise er ikke kvadratisk

Determinant er en funksjon som er definert for kvadratiske matriser med tallverdier

Skrivemåte: $\det(A)$, $|A|$

A: $n \times n$-matrise

$\det(A)$: orden n determinant

a) Orden to determinanter:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definisjon:

$$\det(A) = ad - bc$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}: \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$$
$$= 4 - 6 = \underline{\underline{-2}}$$

Tolkning av determinant:

Hvis $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er koeff. matrisen til et lineært system, så har vi:

$a \neq 0$

$$\begin{aligned} ax + by &= * \\ cx + dy &= * \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & * \\ c & d & * \end{array}\right) \cdot a$$

utvidet matrise

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & * \\ ac & ad & * \end{array}\right) \; -c$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & * \\ 0 & ad-bc & * \end{array}\right)$$

$a \neq 0$:

$ad - bc \neq 0$: Én løsn.

$ad - bc = 0$:

- ingen pivot-pos. i rad to
  → uendelig mange løsn.
- pivot-pos. i siste kolonne
  → ingen løsn.

Konklusjon:

Hvis A er koeff.matrisen til et 2x2 lineært system, så har vi:

i) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ én løsn.

ii) $\det(A) = 0 \Rightarrow$ ingen løsn. eller uend. mange løsn.

Spesialtilfelle: $a=0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 0 \cdot d - bc = -bc$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & * \\ c & d & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} c & d & * \\ 0 & b & * \end{array}\right)$$

én løsn. $\Leftrightarrow$ $b \neq 0$, $c \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $-bc \neq 0$

Eks: $\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 4y &= 7 \end{aligned}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Koeff.matrise

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

én løsning

Eks:

$$\boxed{\begin{aligned} ax + 6y &= 0 \\ 3x + 2ay &= 3-a \end{aligned}}$$

lineært
2×2-system
ukjente: x, y
med parameter a

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 6 & 0 \\ 3 & 2a & 3-a \end{array}\right)$$

utvidet matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & 6 \\ 3 & 2a \end{pmatrix}$$

Koeff. matrise

$$|A| = a \cdot 2a - 6 \cdot 3$$
$$= \underline{2a^2 - 18}$$

Når er $|A| = 0$?

$$2a^2 - 18 = 0$$
$$a^2 = 9$$
$$a = \underline{\pm 3}$$

Konklusjon:

$a = 3, -3$: ingen eller uend. mange løsn.

$a \neq 3, -3$: én løsn.

b) Høyere ordens determinanter:

Tolkning:

Hvis A er koeff. matrisen til et $n \times n$ lineært system, så har vi:

$|A| \neq 0$: én løsning

$|A| = 0$: ingen løsn. eller uend. mange løsn.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = ?$$

3x3-matrise

Formler:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} : \quad |A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Vi bruker en metode som kalles kofaktor-utvikling istedet for formler når $n > 2$.

Kofaktorutvikling:

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$

Kofaktor utvikling langs første rad.

Defn. av kofaktorer:

C_{ij} : kofaktoren til A i posisjon (i,j)

dvs $\begin{cases} \text{rad } i \\ \text{kolonne } j \end{cases}$

$$C_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{fortegn}} \cdot \underbrace{M_{ij}}_{\text{minor}}$$

Fortegn: posisjon $(1,1) \rightsquigarrow (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$

" $(1,2)$ $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$

Fortegnsdiagram:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Minor: M_{ij} = determinanten til undermatrisen vi får når vi slettes rad i og kolonne j fra A

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

kofaktor-utvikling langs første rad

$$|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$

$$= 1 \cdot \left(+1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \left(+1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$M_{11} = \begin{array}{ccc} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & -1 & 1 \\ \cancel{1} & 2 & 4 \end{array} \qquad M_{12} = \begin{array}{ccc} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & \cancel{-1} & 1 \\ 1 & \cancel{2} & 4 \end{array}$$

$$= +1 \cdot \left((-1) \cdot 4 - 1 \cdot 2\right)$$
$$- 1 \cdot \left(1 \cdot 4 - 1 \cdot 1\right)$$
$$+ 1 \cdot \left(1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1\right)$$

$$= 1 \cdot (-6) - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = -6 - 3 + 3 = \underline{\underline{-6}}$$

Definisjon: A $n \times n$-matrise

Vi definerer determinanten $\det(A)$ til å være kofaktorutviklingen til A langs første rad:

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \dots + a_{1n} \cdot C_{1n}}$$

Resultat:

Kofaktorutviklingen til A langs en hvilken som helst rad eller kolonne gir $|A|$.

Eks:

Fortegn:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{21} + 1 \cdot C_{31}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-4-2) - 1(4-2) + 1 \cdot (1-(-1))$$

$$= -6 - 2 + 2 = \underline{\underline{-6}}$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

kvadratisk matrise på trappeform

$$|A| = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot * + 0 \cdot * - 0 \cdot *$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(+1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 0 * + 0 * \right)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - 1 \cdot 0)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-2) = \underline{\underline{-12}}$$

For en kvadratisk matrise på trappeform, er determinanten lik produktet av tallene på diagonalen.

Metode: Gauss-eliminasjon og determinanter.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ ]\cdot(-1) \\ ]\cdot(-1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ]\cdot \tfrac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = T$$

$$|A| = |T| = \underline{\underline{-6}}$$

$$|T| = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = \underline{\underline{-6}}$$

Determinant og radoperasjoner:

Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon, så har vi:

i) Hvis vi bytter om to rader, så er $|B| = -|A|$

ii) Hvis vi mult. en rad med $c \neq 0$, så er $|B| = c \cdot |A|$

iii) Hvis vi legger til et multippel av en rad til en annen rad, så er $|B| = |A|$.

Eks:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

Alt 1:

Kofaktorutv. langs 1. rad.

Alt 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \; 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \; \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \; -1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Alt 3:

$$-1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Cramers regel:

Anta at vi har et $n \times n$ lineært system med koeff. matrise A, og at $|A| \neq 0$

Da har systemet løsningen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gitt ved:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \\ x_2 &= \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|} \end{aligned}}$$

$\underline{b}$ er den siste kolonnen i den utvidede matrisen $(A \mid \underline{b})$

$A_i(\underline{b})$: matrise vi får om vi bytter ut kolonne i fra A med $\underline{b}$.

Ex:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x - y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 16 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A_1(\underline{b}) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 16 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\underline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3(\underline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 16 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \begin{aligned} &\leftarrow |A_1(\underline{b})| \\ &\leftarrow |A| \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \begin{aligned} &\leftarrow |A_2(b)| \\ &\leftarrow |A| \end{aligned}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

Beregning:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3-2) - 1\,(3-2) + 1\cdot(1-(-1)) = -5-1+2 = \underline{-4}$$

$$|A_1(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 16 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot(-5) - 1\cdot(1) + 16\cdot(2) = -4$$

$$|A_2(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(3-16) - 1\,(21-16) + 1\cdot(7-1) = -13-5+6 = -12$$

$$|A_3(b)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot(-16-2) - 1\,(16-14) + 1\,(1+7) = -18-2+8 = -12$$

$$x = \frac{-4}{-4} = \underline{1} \qquad y = \frac{-12}{-4} = \underline{3} \qquad z = \frac{-12}{-4} = \underline{3}$$