FORELESNING 23

MET 1180 BI

MATEMATIKK

Eivind Eriksen   MAR 02, 2016

<u>Plan:</u>

1. Repetisjon: Determinanter og lineære system
2. Matriser og matrisealgebra
3. Inverse matriser (utsatt til neste uke)

<u>Pensum:</u>

[S] 10.2 – 10.6, 10.9 – 10.11

[E] 6.5

---

1. Repetisjon: Determinanter og lineære system

* Hvis A er en kvadratisk matrise $(n \times n)$, kan vi finne $\det(A)$:

<u>Eks:</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $|A| = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = \underline{-7}$$

<u>Eks:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = +4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-8) - 0 + 7(-7) = -32 - 49 = \underline{\underline{-81}}$$

Resultat:

Hvis et kvadratisk lineært system $(n \times n)$ har koeffisientmatrise A, så har vi:

$|A| \neq 0$: Det lineære systemet har <u>én</u> løsning

$|A| = 0$: — " — har <u>ingen</u> eller <u>uendelig mange</u> løsninger.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 5 \\ x + y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

3x3 lin. system

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & \cancel{5}\,1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

trappeform

Når vi har en trappeform, er det. lik produktet av tallene på diag.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-5) = \underline{15} \neq 0$$

Det betyr: systemet har én løsning.

<u>Cramers regel:</u>

$$x = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 1 - 1(-23) + 1 \cdot 6}{15} = \frac{33}{15} = \underline{\underline{2{,}2}}$$

$$y = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|}$$

2 Regning med matriser og vektorer

BI

En $m \times n$-matrise A er en rektangulær tabell (m rader, n kolonner) av tall:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij}: tallet i A i rad i, kolonne j

posisjon (i,j)

Addisjon og subtraksjon:

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-1) \\ 3+2 & 4+0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$A+B$ og $A-B$ er definert hvis A og B er matriser av samme størrelse (like mange rader, like mange kolonner). Addisjon/subtraksjon utføres posisjon for posisjon.

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikasjon av en matrise med et tall:

Eks:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$r \cdot A$ er definert når r er et tall, A en matrise, utføres posisjon for posisjon

Merk:

* når vi skriver $r \cdot A$ sier vi at r er et tall og A en matrise
* $A \cdot r = r \cdot A$ **Eks:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

  $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
* Skrivemåte $-A$ betyr $(-1) \cdot A$

Eks: $-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

Eks:

	2015	2014	2013
Seg. A			
Seg. B			
Seg. C			

salgstall

S

	2015	2014	2013
Seg A			
Seg B			
Seg C			

direkte kostn.

K

S − K

En vektor (kolonnevektor) er en matrise med én kolonne.

Eks: $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Skrivemåte: fet skrift (understreket i håndskrift)

Vektor med n komponenter: n-vektor

Eks: $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2-vektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3-vektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Regneoperasjoner på vektorer:

Spesialtilfelle av operasjoner på matriser

Eks: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v}$ definert om $\underline{u}, \underline{v}$ har samme størrelse

$r \cdot \underline{u}$ definert for alle tall r, vektor $\underline{u}$

Eks: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Multiplikasjon av en matrise med en vektor

$$\underset{m\times n\text{-matrise}}{A} \cdot \underset{n\text{-vektor}}{\underline{x}} = \underset{m\text{-vektor}}{A\underline{x}}$$

} utføres ikke posisjon for posisjon

antall kolonner i A

$=$ antall komp. i $\underline{x}$

Eks:

$$\underset{2\times 2\text{-matrise}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\text{-vektor}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5$

$0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = -2$

Eks:

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot x + 2\cdot y + 3\cdot z \\ 4x + 7y - 1\cdot z \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 7y - z \end{pmatrix}}}$$

Formel:

$$\underline{A}\cdot \underline{x} = \overset{m\times n\text{-m.}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \overset{n\text{-vekt.}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{m\text{-vekt.}}{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}$$

Lineære system på matriseform

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

($m\times n$ lin. system i ukjente $x_1,\dots,x_n$)

Venstre side $= A\underline{x}$, der A er koeff. matrisen til systemet og $\underline{x}$ er vektoren med $x_1, x_2, \dots, x_n$ som komponenter

$A\underline{x} = \underline{b}$ matriseformen til det lineære systemet

Eks:

$$x+y+z=3$$
$$x-y+z=1$$
$$x+2y+4z=7$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$$

$$A\underline{x}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z\\1\cdot x-1\cdot y+1\cdot z\\1\cdot x+2y+4\cdot z\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}x+y+z\\x-y+z\\x+2y+4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}}_{A\cdot\underline{x}=\underline{b}\ \text{matriseform}}$$

Utvidet matrise

$$(A\,|\,\underline{b})$$

$$\cancel{\underline{x}=\frac{\underline{b}}{A}}$$

divisjon med matriser?

Matrisemultiplikasjon

Eks: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & 25 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = AB \end{array}$$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}}}$

A $m \times n$-matrise, B $n \times p$-matrise $\rightsquigarrow$ $A \cdot B = AB$ $m \times p$-matrise

(antall kolonner i A = antall rader i B)

Eks: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ er <u>ikke</u> definert

Matrisemultiplikasjon er <u>ikke</u> kommutativt: $AB \neq B \cdot A$

Eks:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$

Potenser av matriser:

$A^2 = A \cdot A$ $\qquad$ $A^3 = A \cdot A \cdot A$ $\qquad$ etc

antall kol. i A
= antall rad i A
dvs A kvadratisk

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$$

Identitetsmatrisen:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$I \cdot A = A$

Transponering og symmetriske matriser

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En matrise kalles symmetrisk hvis $A^T = A$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

En kvadratisk matrise er symmetrisk hvis

$$a_{ij} = a_{ji}$$

rad i
kolonne j

rad j
kolonne i

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Symmetrisk